



## Unterlagen für die Lehrkraft

# Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase

## 2013

## Mathematik

---

### 1. Aufgabenart

Analysis

### 2. Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen	(28 Punkte)
Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve	(28 Punkte)

### 3. Materialgrundlage

entfällt

### 4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

- Geraden und Geradengleichungen (z.B.  $g(A;B)$ ; Steigungswinkel; Parallelität)
- Nullstellen ganzrationaler Funktionen, in faktorisierter Form (keine Polynomdivision, einfaches Ausklammern)
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis  $n = 3$ : Nullstellen, Standardsymmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten (Links- und Rechtskrümmung), Wendepunkte (auch Sattelpunkte)
- Tangentengleichungen
- Einfache Transformationen wie Verschieben, Strecken oder Spiegeln von Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen 3. Grades
- Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitungsfunktion
- Differenzialrechnung in Sachzusammenhängen (z. B. durchschnittliche und momentane Änderungsrate; Interpretation ausgezeichneter Punkte im Sachkontext)

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

#### Modelllösung a)

(1) Ableitungen:  $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$ ;  $f''(x) = x - 2$

Mit der notwendigen Bedingung  $f'(x) = 0$  für lokale Hoch- und Tiefpunkte folgt  $x = 0$  oder  $x = 4$ . Weil zusätzlich  $f''(0) = -2 < 0$  und  $f(0) = 4$  gilt, ist der lokale Hochpunkt  $H(0|4)$ . Weil außerdem  $f''(4) = 2 > 0$  und  $f(4) = -\frac{4}{3}$  gilt, ist der lokale Tiefpunkt  $T\left(4 \mid -\frac{4}{3}\right)$ .

(2)  $m = \frac{-\frac{4}{3} - 4}{4 - 0} = -\frac{4}{3}$

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

#### Modelllösung b)

$f(2) = \frac{4}{3} = 1,\bar{3}$ . Wegen  $1,3 < 1,\bar{3}$  liegt der Punkt  $P$  im Teil B.

Ein bloßes Ablesen ist aufgrund der Gegebenheiten eine ungeeignete Methode und führt nicht zur Vergabe von Bewertungspunkten.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

#### Modelllösung c)

Die Gleichung  $f(x) = \frac{4}{3}$  hat die Lösungen  $x_1 = -2 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ ,  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ .

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*



### Modelllösung d)

(1) Gleichung der Tangente  $t$ :  $t(x) = m \cdot x + b$ :

$$m = f'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Wegen } Q \in t \text{ ergibt sich: } f(5) = g(5) \Rightarrow b = \frac{14}{3}$$

$$\text{und damit die Gleichung der Tangente } t: t(x) = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{14}{3}.$$

(2) Für die Steigung der Tangente an der Stelle  $x = 3$  gilt:

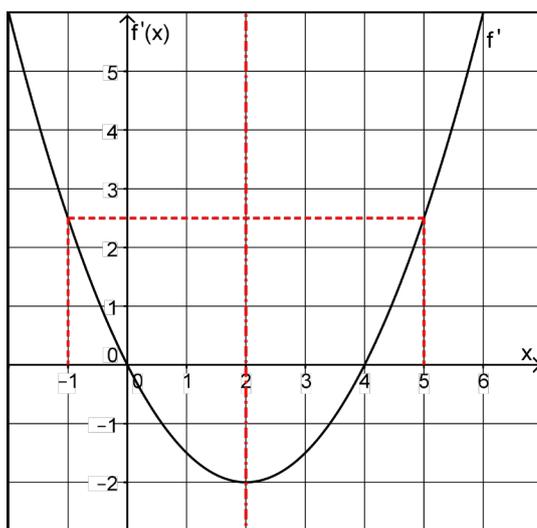
$$m = f'(3) = -\frac{3}{2}$$

Da diese Steigung mit der Steigung von  $t$  übereinstimmt, ist die Tangente an der Stelle  $x = 3$  parallel zu  $t$ .

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

### Modelllösung e)

(1), (2)





$$(3) \quad f'(2-a) = \frac{1}{2} \cdot (2-a)^2 - 2 \cdot (2-a) = \frac{1}{2} \cdot (4 - 4 \cdot a + a^2) - 2 \cdot (2-a)$$

$$= 2 - 2 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2 - 4 + 2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2 - 2$$

$$f'(2+a) = \frac{1}{2} \cdot (2+a)^2 - 2 \cdot (2+a) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 4 \cdot a + a^2) - 2 \cdot (2+a)$$

$$= 2 + 2 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2 - 4 - 2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2 - 2$$

Somit gilt:  $f'(2-a) = f'(2+a)$

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

## Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

### Modelllösung a)

$$f(1) = 7,125, \quad f(7) = 4,875$$

Um 9:00 Uhr hat die subjektive Leistungsfähigkeit Fraukes einen Skalenwert von 7,125 und um 15:00 Uhr einen Skalenwert von 4,875.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

### Modelllösung b)

Gesucht ist die Maximalstelle von  $f$  sowie das Maximum selbst.

$$\text{Ableitungen: } f'(t) = 0,375 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 4,5; \quad f''(t) = 0,75 \cdot t - 3$$

Mit der notwendigen Bedingung  $f'(t) = 0$  ergeben sich die beiden möglichen Extremstellen  $t_1 = 2$  und  $t_2 = 6$ .

Wegen  $f''(2) = -1,5 < 0$  liegt an der Stelle  $t = 2$  ein lokales Maximum mit  $f(2) = 8$  vor. Es handelt sich für den zu Grunde liegenden Zeitraum auch um das absolute Maximum, erkennbar z. B. an den Randwerten  $f(0)$  und  $f(7)$  oder an Abbildung 1.

Frauke erreicht ihre maximale Leistungsfähigkeit um 10:00 Uhr mit einem Skalenwert von 8.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*



### Modelllösung c)

Gesucht sind die Stellen maximaler Ab- bzw. Zunahme der subjektiven Leistungsfähigkeit.

Mit  $f''(t) = 0,75 \cdot t - 3$  und  $f''(t) = 0$  folgt  $t = 4$ . Wegen  $f'''(4) = 0,75 > 0$  liegt bei  $t = 4$  ein relatives Minimum von  $f'$  vor. Da es sich um die einzige relative Extremstelle handelt, liegt dort auch ein absolutes Minimum vor.

Die Stelle maximaler Zunahme muss am Rand des Intervalls liegen. Es gilt  $f'(0) = 4,5$  und  $f'(7) = 1,875$ .

Die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke nimmt also um 12:00 Uhr am stärksten ab und morgens um 8:00 Uhr am schnellsten zu.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

### Modelllösung d)

(1) Der Graph von  $g$  ergibt sich durch eine Verschiebung um 0,5 Einheiten nach rechts und eine Verschiebung um 1 Einheit nach oben aus dem Graphen von  $f$ .

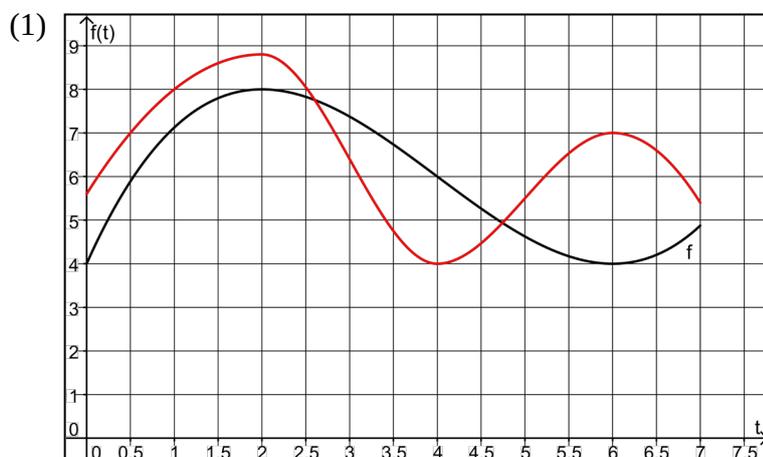
$$(2) \quad g(t) = f(t - 0,5) + 1 = 0,125 \cdot t^3 - 1,6875 \cdot t^2 + 6,09375 \cdot t + 2,359375$$

(3) Die Gleichung  $f(t) = g(t)$  hat die beiden Lösungen  $t_1 = \frac{-(\sqrt{149} - 17)}{4} \approx 1,2$  und  $t_2 = \frac{\sqrt{149} + 17}{4} \approx 7,3$ .

Am Verlauf der Graphen in Abbildung 2 ist zu erkennen, dass die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke für ungefähr 1,2 Stunden, also 72 Minuten, höher ist als die von Gaby.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*

### Modelllösung e)





- (2) Da die Leistungskurve von Hans drei lokale Extrempunkte aufweist (und somit die zugehörige Ableitungsfunktion mindestens vom Grad 3 sein muss), kann es sich nicht um den Graphen einer Funktion 3. Grades handeln.

*Der gewählte Lösungsansatz und –weg muss nicht identisch mit dem in der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.*



## 7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

#### Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) berechnet die Ableitungen $f'$ und $f''$ .	2	
2	(1) berechnet die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes.	4	
3	(2) berechnet die Steigung der Geraden durch die beiden lokalen Extrempunkte.	2	
sachlich richtige Alternativen: (8) ..... .....			
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>8</b>	

#### Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	entscheidet begründet, ob der Punkt $P$ zu A oder zu B gehört.	3	
sachlich richtige Alternativen: (3) ..... .....			
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>3</b>	

#### Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	ermittelt die natürliche Zahl, die sich durch Addition der $x$ -Koordinaten der drei Schnittpunkte ergibt.	3	
sachlich richtige Alternativen: (3) ..... .....			
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>3</b>	



**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Gleichung der Tangente $t$ an den Graphen von $f$ im Punkt $Q$ .	3	
2	(2) zeigt, dass die Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $x = 3$ parallel zur Tangente $t$ verläuft.	2	
sachlich richtige Alternativen: (5) ..... .....			
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>5</b>	

**Teilaufgabe e)**

Anforderungen		Lösungsqualität	
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) zeichnet die Symmetrieachse des Graphen von $f'$ in die Abbildung 3 ein.	2	
2	(2) zeigt anhand des Graphen, dass für $a = 3$ die Gleichung erfüllt ist, indem er geeignete Hilfslinien in die Abbildung 3 einzeichnet.	3	
3	(3) weist ohne Verwendung seines Computer-Algebra-Systems rechnerisch nach, dass die Gleichung $f'(2 - a) = f'(2 + a)$ für jeden Wert von $a$ gültig ist.	4	
sachlich richtige Alternativen: (9) ..... .....			
<b>Summe Teilaufgabe e)</b>		<b>9</b>	

<b>Summe insgesamt</b>		<b>28</b>	
------------------------	--	-----------	--



## Aufgabe 2: Persönliche Leistungskurve

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>		
1	berechnet Fraukes subjektive Leistungsfähigkeit um 9:00 Uhr und um 15:00 Uhr.	3	
sachlich richtige Alternativen: (3) ..... .....			
	<b>Summe Teilaufgabe a)</b>	<b>3</b>	

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>		
1	berechnet die Ableitungen $f'$ und $f''$ .	2	
2	weist rechnerisch nach, dass Frauke um 10:00 Uhr mit dem Skalenwert 8 ihr persönliches Leistungshoch erreicht.	4	
sachlich richtige Alternativen: (6) ..... .....			
	<b>Summe Teilaufgabe b)</b>	<b>6</b>	

### Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>		
1	ermittelt den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke am stärksten abnimmt.	4	
2	bestimmt den Zeitpunkt im Zeitraum von 8:00 Uhr bis 15:00 Uhr, an dem ihre subjektive Leistungsfähigkeit am stärksten zunimmt.	3	
sachlich richtige Alternativen: (7) ..... .....			
	<b>Summe Teilaufgabe c)</b>	<b>7</b>	



**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>		
1	(1) beschreibt, in welcher Weise sich der Graph von $g$ durch zwei Verschiebungen des Graphen von $f$ parallel zu den Koordinatenachsen ergibt.	2	
2	(2) gibt eine Funktionsgleichung von $g$ an.	2	
3	(3) berechnet, für wie viele Minuten die subjektive Leistungsfähigkeit von Frauke höher ist als die subjektive Leistungsfähigkeit von Gaby.	3	
sachlich richtige Alternativen: (7) ..... .....			
	<b>Summe Teilaufgabe d)</b>	<b>7</b>	

**Teilaufgabe e)**

	Anforderungen	Lösungsqualität	
		maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>		
1	(1) skizziert einen möglichen Verlauf der Leistungskurve von Hans.	3	
2	(2) entscheidet begründet, ob es sich bei der Leistungskurve von Hans um den Graphen einer Funktion 3. Grades handeln kann.	2	
sachlich richtige Alternativen: (5) ..... .....			
	<b>Summe Teilaufgabe e)</b>	<b>5</b>	

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>28</b>	
--	------------------------	-----------	--



### Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	28	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	28	
<b>Gesamtpunktzahl</b>	<b>56</b>	

<b>Note</b>
-------------

Unterschrift, Datum

### Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	49 – 56
gut	41 – 48
befriedigend	33 – 40
ausreichend	24 – 32
mangelhaft	12 – 23
ungenügend	0 – 11