Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2014

Mathematik

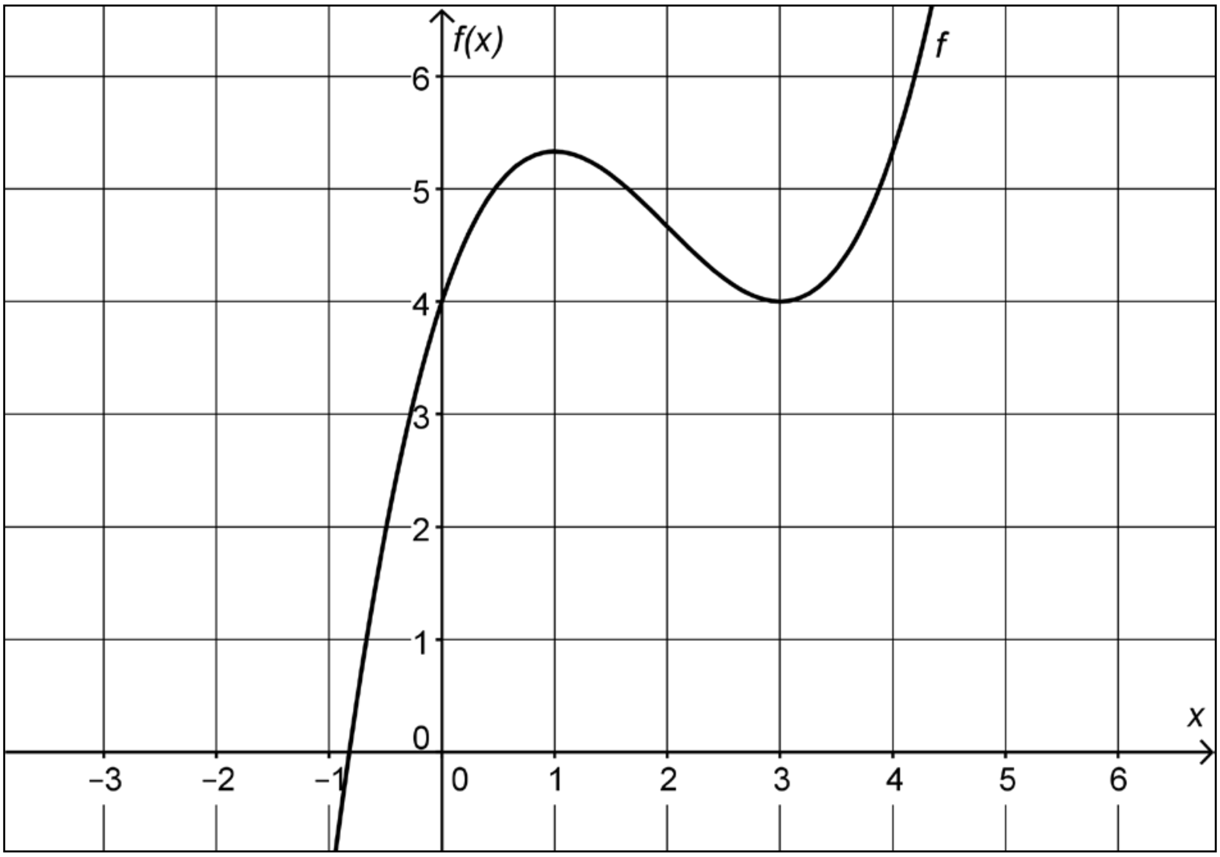
Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 .$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Abbildung

a) *Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.*

(6 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t_1 an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$.*

(2) *Zeichnen Sie diese Tangente t_1 in die Abbildung ein.*

(3) Es gibt eine Tangente t_2 am Graphen von f , die parallel zur Tangente t_1 ist.

Berechnen Sie, an welcher Stelle die Tangente t_2 den Graphen von f berührt.

(4) Die Tangente t_1 bildet zusammen mit den beiden Achsen des Koordinatensystems ein Dreieck.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Berechnen Sie auch den Umfang des Dreiecks.

(3+2+2+6 Punkte)

c) Der Graph der Funktion f wird nacheinander zwei Transformationen unterzogen. Dadurch ergibt sich der Graph einer Funktion g, für die Folgendes gilt:

1. Die Stellen $x = 2$ und $x = 4$ sind Extremstellen von g.
2. Die x-Achse ist eine Tangente an den Graphen von g.

Geben Sie begründet eine mögliche Funktionsgleichung von g an.

[Hinweis: Hier ist keine Rechnung erforderlich.]

(4 Punkte)

d) Die Funktion f wird nun als Ableitungsfunktion einer Funktion F betrachtet.

An der Nullstelle von f besitzt der Graph von F entweder einen lokalen Hochpunkt oder einen lokalen Tiefpunkt oder einen Sattelpunkt.

Entscheiden Sie begründet, welche dieser drei Möglichkeiten hier vorliegt.

(3 Punkte)

e) Ein Schüler versucht den Funktionsterm von f als ein Produkt darzustellen und wählt dazu den Ansatz $f(x) = (x+1) \cdot q(x)$, wobei q eine quadratische Funktion ist.

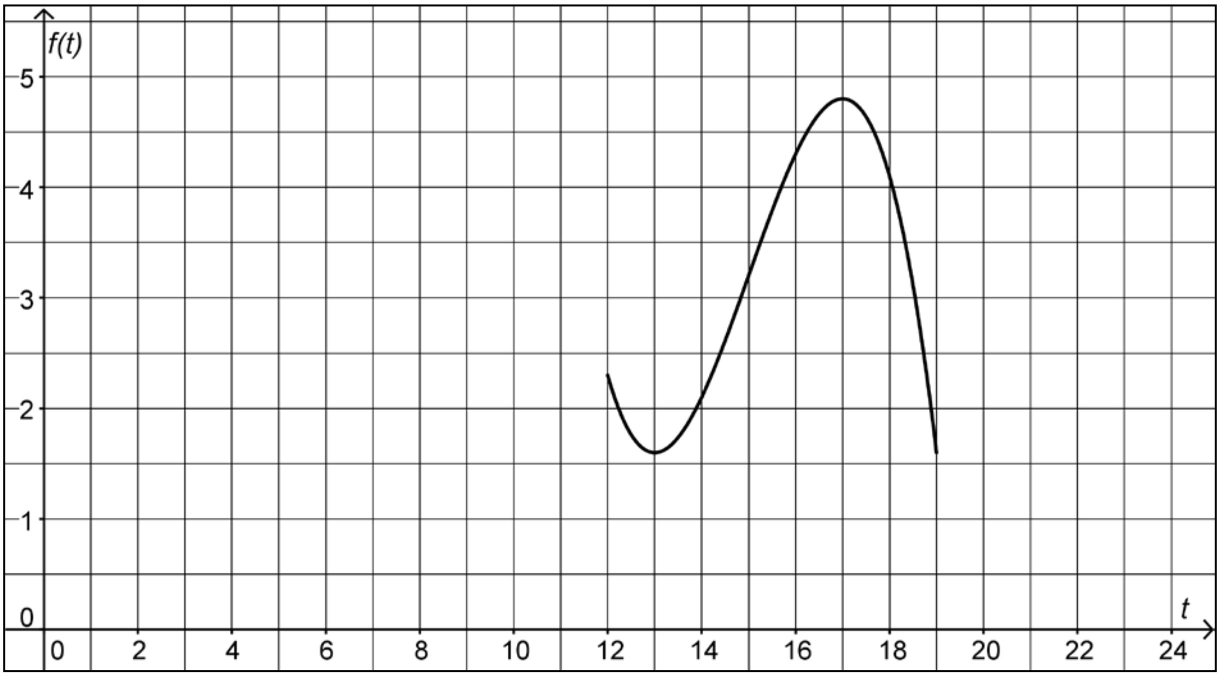
Begründen Sie, dass eine solche Darstellung nicht möglich ist. **(2 Punkte)**

Name: ____________________

Aufgabe 2: Verkehrsstau

An einer Autobahnbaustelle wurde über einen längeren Zeitraum die Stauentwicklung untersucht.

Für $12 \le t \le 19$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft die Staulänge während eines bestimmten Tages in der Zeit von 12:00 Uhr bis 19:00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Abbildung

Es gilt:

$$f(t) = -0{,}1 \cdot t^3 + 4{,}5 \cdot t^2 - 66{,}3 \cdot t + 322{,}7\ .$$

Dabei ist t die Uhrzeit (z. B. 14:00 Uhr $\mathrel{\widehat{=}}$ $t = 14$) und $f(t)$ die Staulänge zur Zeit t in Kilometern. Mit dieser Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) (1) *Berechnen Sie die Länge des Staus um 13:00 Uhr.*

(2) Um abzuschätzen, wie viele Fahrzeuge um 13:00 Uhr im Stau stehen, müssen Annahmen getroffen werden.

Berechnen Sie mit Hilfe von zwei plausiblen Annahmen einen Schätzwert für die Anzahl der Fahrzeuge, die um 13:00 Uhr in diesem Stau stehen.

(2+3 Punkte)

Name: ____________________

b) *Ermitteln Sie rechnerisch die Uhrzeit, zu der die Staulänge im betrachteten Zeitraum maximal ist, und geben Sie die maximale Länge des Staus an.*

(7 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie, um wie viele Kilometer die Staulänge in der Zeit von 13:00 Uhr bis 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt zunimmt.*

(2) *Zeigen Sie rechnerisch, dass der Zeitraum, in dem der Stau länger als 3 km war, kürzer als 4 Stunden gewesen ist.*

(2+4 Punkte)

d) Für die Funktion f gelten für $15 < t < 17$ die beiden Ungleichungen:

$$f'(t) > 0 \text{ und } f''(t) < 0 .$$

Interpretieren Sie, welche Bedeutung diese beiden Ungleichungen im Sachzusammenhang der Aufgabe haben.

(4 Punkte)

e) Es kann davon ausgegangen werden, dass sich der Stau ab 19:00 Uhr gleichmäßig um 3,6 Kilometer pro Stunde verringert.

(1) *Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der sich der Stau vollständig aufgelöst hat.*

(2) Die Staulänge ab 19:00 Uhr soll mit einer geeigneten Funktion *g* modelliert werden.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion g.

(3+3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung