



Name: _____

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

In einer Studie zum Spracherwerb von Kindern ist untersucht worden, wie sich die Länge gesprochener Sätze (kurz: Satzlänge) mit dem Alter der Kinder entwickelt.

Ein Sprachforscher modelliert mit einer Funktion r die **momentane Änderungsrate**, mit der sich die durchschnittliche Satzlänge¹ der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, im Alter von 1,5 Jahren bis 5,5 Jahren verändert. Dazu verwendet er für $1,5 \leq t \leq 5,5$ die Gleichung

$$r(t) = 0,31 \cdot e^{-0,25 \cdot t^2 + 1,25 \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Maßeinheit 1 Jahr und $r(t)$ als Maßzahl zur Maßeinheit 1 Wort pro Jahr aufgefasst.

Der Graph von r im Bereich $1,5 \leq t \leq 5,5$ ist in *Abbildung 1* dargestellt.

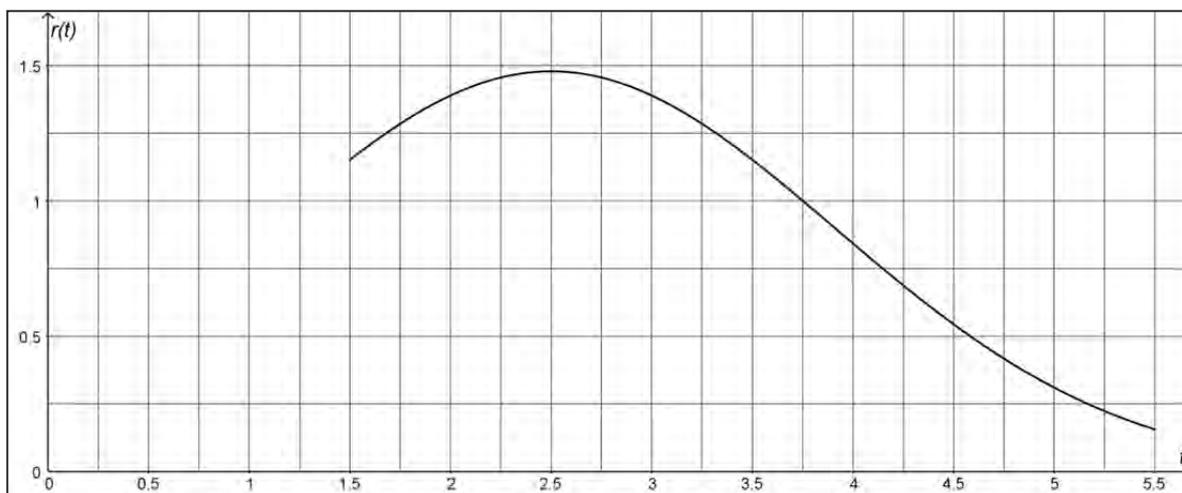


Abbildung 1

¹ Im Folgenden wird die durchschnittliche Satzlänge der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, kurz als Satzlänge bezeichnet.



Name: _____

a) (1) Berechnen Sie den Funktionswert von r an der Stelle $t = 2$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) Für die Funktion r gilt die Aussage:

$$r(t) > 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(3) Weisen Sie rechnerisch nach, dass im gegebenen Modell im Alter von 2,5 Jahren die größte momentane Änderungsrate der Satzlänge vorliegt.

(4) Ermitteln Sie das Alter zwischen 1,5 und 5,5 Jahren, in dem die momentane Änderungsrate der Satzlänge am schnellsten abnimmt.

(2 + 3 + 6 + 7 Punkte)

b) In der Studie ist bei Kindern im Alter von 1,5 Jahren eine Satzlänge von 1,2 Wörtern beobachtet worden.

(1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Terme $\int_{1,5}^t r(u) du$ und $1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt$ im Sachzusammenhang.

Die konkrete Ermittlung eines Funktionsterms einer Stammfunktion von r mit Hilfe eines

Integrationsverfahrens ist nicht möglich. Daher wird der Wert des Integrals $\int_{1,5}^{5,5} r(t) dt$ durch

ein numerisches Verfahren bestimmt. In *Abbildung 2* ist dieses Verfahren veranschaulicht.

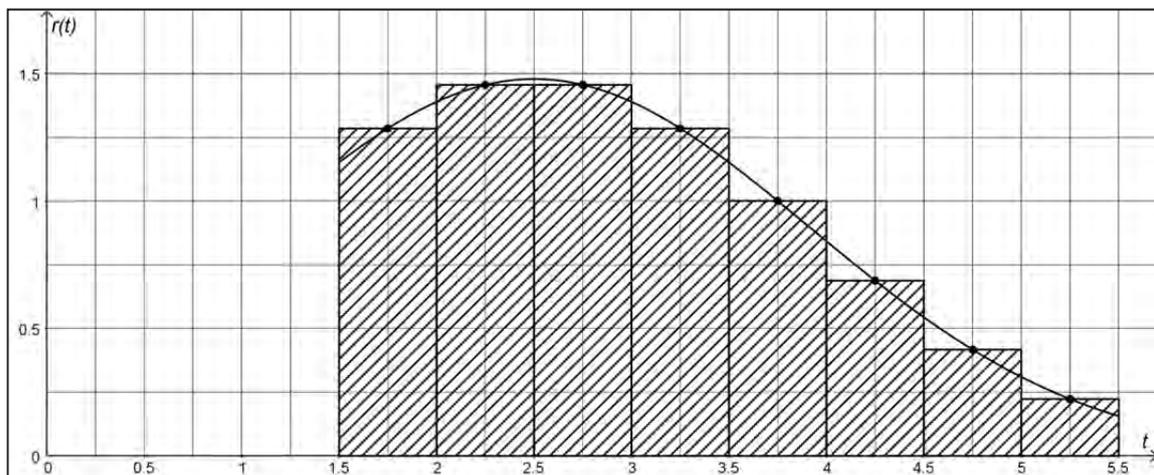


Abbildung 2



Name: _____

(2) *Beschreiben Sie kurz das Vorgehen bei diesem numerischen Verfahren.*

(3) *Berechnen Sie mit diesem numerischen Verfahren einen Näherungswert für den*

$$\text{Term } 1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt.$$

(4 + 4 + 5 Punkte)

c) Für $1,5 \leq a \leq 4,5$ ist die Funktion z definiert durch die Gleichung $z(a) = \int_a^{a+1} r(t) dt$.

(1) *Interpretieren Sie, welche Bedeutung die Funktion z im Sachzusammenhang hat.*

(2) *Begründen Sie, warum für die Ableitung der Funktion z mit $z(a) = \int_a^{a+1} r(t) dt$ gilt:*

$$z'(a) = r(a+1) - r(a).$$

[Sie können davon ausgehen, dass es eine Stammfunktion R von r gibt. Wie bereits in b) angegeben, ist die konkrete Ermittlung eines Funktionsterms von R mit Hilfe eines Integrationsverfahrens aber nicht möglich.]

Für die Funktion z wird folgende Berechnung durchgeführt, die von Ihnen in der Teilaufgabe (3) interpretiert werden soll:

I $z'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2.$

II $z''(2) = -\frac{31}{200} \cdot e^{\frac{3}{2}} < 0.$

(3) *Interpretieren Sie die Lösung $a = 2$ der Gleichung $z'(a) = 0$ (siehe **I**) unter Berücksichtigung von **II** im Sachzusammenhang.*

(2 + 3 + 3 Punkte)



Name: _____

- d) Einige Forscher gehen davon aus, dass bei zweisprachig aufwachsenden Kindern eine verzögerte Sprachentwicklung auftritt.

Zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Satzlänge von zweisprachig aufwachsenden Kindern im Alter von 2 Jahren bis 5,5 Jahren verwendet der Sprachforscher für $2 \leq t \leq 5,5$ die Funktion r_{neu} mit der Gleichung

$$r_{\text{neu}}(t) = 0,31 \cdot e^{-0,25 \cdot t^2 + 1,5 \cdot t - 0,6875}, t \in \mathbb{R}.$$

- (1) Der Graph der Funktion r_{neu} geht durch eine Verschiebung aus dem Graphen der Funktion r hervor.

Zeichnen Sie in Abbildung 1 den Graphen von r_{neu} ein und ermitteln Sie anhand Ihrer Zeichnung die Verschiebung.

- (2) *Prüfen Sie nun rechnerisch, ob sich bei der von Ihnen ermittelten Verschiebung der Funktionsterm von r_{neu} aus dem Funktionsterm von r ergibt.*

- (3) Für die zweisprachig aufwachsenden Kinder geht der Sprachforscher davon aus, dass die durchschnittliche Satzlänge von 1,2 Wörtern statt im Alter von 1,5 Jahren erst im Alter von 2 Jahren vorliegt.

Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung, welcher Unterschied im Alter von 5,5 Jahren zwischen der Satzlänge der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, und der Satzlänge der zweisprachig aufgewachsenen Kinder besteht.

(5 + 2 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
- Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
- Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
- Flächenberechnung durch Integration

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modellösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modellösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) \quad r(2) = \frac{31 \cdot e^{\frac{3}{2}}}{100} \approx 1,39.$$

Die durchschnittliche Satzlänge der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, wächst im gegebenen Modell im Alter von 2 Jahren mit einer momentanen Änderungsrate von 1,39 Wörtern pro Jahr.

(2) Die durchschnittliche Satzlänge der Kinder nimmt im Alter von 1,5 Jahren bis 5,5 Jahren mit zunehmendem Alter zu.

(3) Für das Alter, zu dem die größte momentane Änderungsrate der Satzlänge im Intervall $[1,5;5,5]$ vorliegt, kommen nur die Nullstelle von r' oder die Randstellen in Frage.

Für die Nullstelle von r' gilt: $r'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2,5$.

Mit $r(1,5) \approx 1,15$, $r(2,5) \approx 1,48$ und $r(5,5) \approx 0,16$ folgt, dass bei der Modellierung mit r die Satzlänge der Kinder im Alter von 2,5 Jahren am schnellsten zunimmt.

(4) Das Alter zwischen 1,5 bis 5,5 Jahren, in dem die momentane Änderungsrate der Satzlänge am schnellsten abnimmt, entspricht der Stelle im Intervall $[1,5;5,5]$, an der das absolute Minimum von r' vorliegt.

Für die absolute Minimalstelle von r' im Intervall $[1,5;5,5]$ kommen nur die Nullstellen von r'' in diesem Intervall oder die Randstellen in Frage.

Für die Nullstellen von r'' gilt:

$$r''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-(2 \cdot \sqrt{2} - 5)}{2} \approx 1,09 \vee t = \frac{2 \cdot \sqrt{2} + 5}{2} \approx 3,91.$$

Da 1,09 außerhalb des Intervalls $[1,5;5,5]$ liegt und da $r'(1,5) \approx 0,58$,

$$r'\left(\frac{2 \cdot \sqrt{2} + 5}{2}\right) \approx -0,63 \text{ und } r'(5,5) \approx -0,23 \text{ gilt, folgt:}$$

Das Alter zwischen 1,5 und 5,5 Jahren, in dem die momentane Änderungsrate der Satzlänge am schnellsten abnimmt, ist 3,91 Jahre.

Teilaufgabe b)

(1) Durch den Term $\int_{1,5}^t r(u) du$ ist die Anzahl der Worte gegeben, um die die durchschnitt-

liche Satzlänge im Zeitraum von 1,5 Jahren bis t Jahren anwächst.

Durch den Term $1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt$ ist die durchschnittliche Satzlänge (Anzahl der Worte)

im Alter von 5,5 Jahren gegeben.

(2) Das gegebene Intervall (hier: $[1,5; 5,5]$) wird in gleich lange Teilintervalle der Länge h (hier: $h = 0,5$) unterteilt. Für jedes Teilintervall wird der Funktionswert in der Mitte des Teilintervalls berechnet und mit h multipliziert. Anschließend wird die Summe dieser Produkte gebildet.

$$(3) \quad 1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt$$

$$\approx 1,2 + (r(1,75) + r(2,25) + r(2,75) + r(3,25) + r(3,75) + r(4,25) + r(4,75) + r(5,25)) \cdot 0,5$$

$$\approx 1,2 + (1,28 + 1,46 + 1,46 + 1,28 + 1,00 + 0,69 + 0,42 + 0,22) \cdot 0,5 = 5,105.$$

Teilaufgabe c)

(1) Durch die Funktion z ist die Zunahme der Satzlänge in einem Intervall $[a; a+1]$ gegeben, d. h. die Zunahme der Satzlänge in einem Zeitraum der Länge 1 Jahr, der im Alter von a Jahren beginnt.

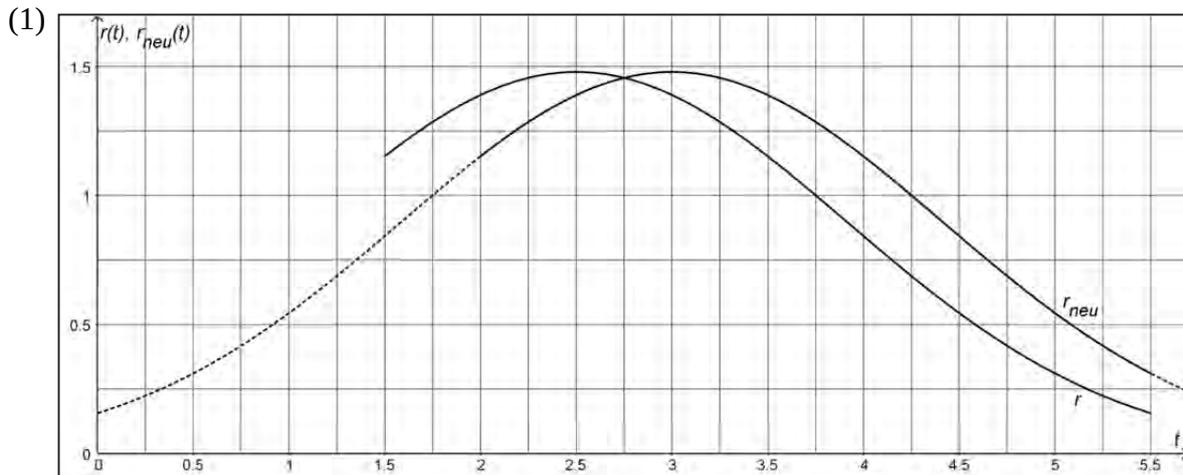
(2) Ist R eine Stammfunktion der Funktion r , so gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung der Ableitungsregeln:

$$z(a) = \int_a^{a+1} r(t) dt = [R(t)]_a^{a+1} = R(a+1) - R(a).$$

$$z'(a) = (R(a+1) - R(a))' = 1 \cdot R'(a+1) - R'(a) = r(a+1) - r(a).$$

(3) Der Zeitraum der Länge 1 Jahr, in dem die größte Zunahme der Satzlänge vorliegt, beginnt im Alter von zwei Jahren.

Teilaufgabe d)



Der Graph von r_{neu} geht durch eine Verschiebung um 0,5 Einheiten nach rechts aus dem Graphen von r hervor.

$$(2) \quad r(t-0,5) = \frac{31 \cdot e^{-\frac{t^2}{4} + \frac{3t}{2} - \frac{11}{16}}}{100} = 0,31 \cdot e^{-0,25t^2 + 1,5t - 0,6875} = r_{\text{neu}}(t).$$

$$(3) \quad 1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt \approx 5,097, \quad 1,2 + \int_2^{5,5} r_{\text{neu}}(t) dt \approx 4,984.$$

$$1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t) dt - \left(1,2 + \int_2^{5,5} r_{\text{neu}}(t) dt \right) \approx 0,113.$$

Im Alter von 5,5 Jahren liegt zwischen der Satzlänge der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, und der Satzlänge der zweisprachig aufgewachsenen Kinder ein Unterschied von ungefähr 0,11 Wörtern vor.

[Hinweis: Ein Zeitungsartikel in „Die Welt“ vom 25.02.2012 nimmt Bezug auf Studien verschiedener Sprachforscher, die eine verzögerte Sprachentwicklung bei zweisprachig aufwachsenden Kindern festgestellt haben.

(<http://www.welt.de/wissenschaft/article13885826/Zweisprachige-Erziehung-verzoegert-Sprachentwicklung.html> (Zugriff am 04.06.2015))

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) berechnet den Funktionswert von r an der Stelle $t = 2$ und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) interpretiert die Bedeutung der Aussage: $r(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ im Sachzusammenhang.	3			
3	(3) weist rechnerisch nach, dass im gegebenen Modell im Alter von 2,5 Jahren die größte momentane Änderungsrate der Satzlänge vorliegt.	6			
4	(4) ermittelt das Alter zwischen 1,5 und 5,5 Jahren, in dem die momentane Änderungsrate der Satzlänge am schnellsten abnimmt.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18)					
Summe Teilaufgabe a)		18			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) interpretiert die Bedeutung des Terms $\int_{1,5}^t r(u)du$ im Sachzusammenhang.	2			
2	(1) interpretiert die Bedeutung des Terms $1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t)dt$ im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) beschreibt kurz das Vorgehen bei dem numerischen Verfahren.	4			
4	(3) berechnet mit diesem numerischen Verfahren einen Näherungswert für den Term $1,2 + \int_{1,5}^{5,5} r(t)dt$.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
.....					
.....					
	Summe Teilaufgabe b)	13			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) interpretiert, welche Bedeutung die Funktion z im Sachzusammenhang hat.	2			
2	(2) begründet, warum für die Ableitung der Funktion z mit $z(a) = \int_a^{a+1} r(t)dt$ gilt: $z'(a) = r(a+1) - r(a)$.	3			
3	(3) interpretiert die Lösung $a = 2$ der Gleichung $z'(a) = 0$ unter Berücksichtigung von II im Sachzusammenhang.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)					
.....					
.....					
	Summe Teilaufgabe c)	8			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) zeichnet in <i>Abbildung 1</i> den Graphen von r_{neu} ein.	3			
2	(1) ermittelt anhand seiner Zeichnung die Verschiebung.	2			
3	(2) prüft rechnerisch, ob sich bei der von ihm ermittelten Verschiebung der Funktionsterm von r_{neu} aus dem Funktionsterm von r ergibt.	2			
4	(3) ermittelt, welcher Unterschied im Alter von 5,5 Jahren zwischen der Satzlänge der Kinder, die an der Studie teilgenommen haben, und der Satzlänge der zweisprachig aufgewachsenen Kinder besteht.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
	Summe Teilaufgabe d)	11			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.



Name: _____

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

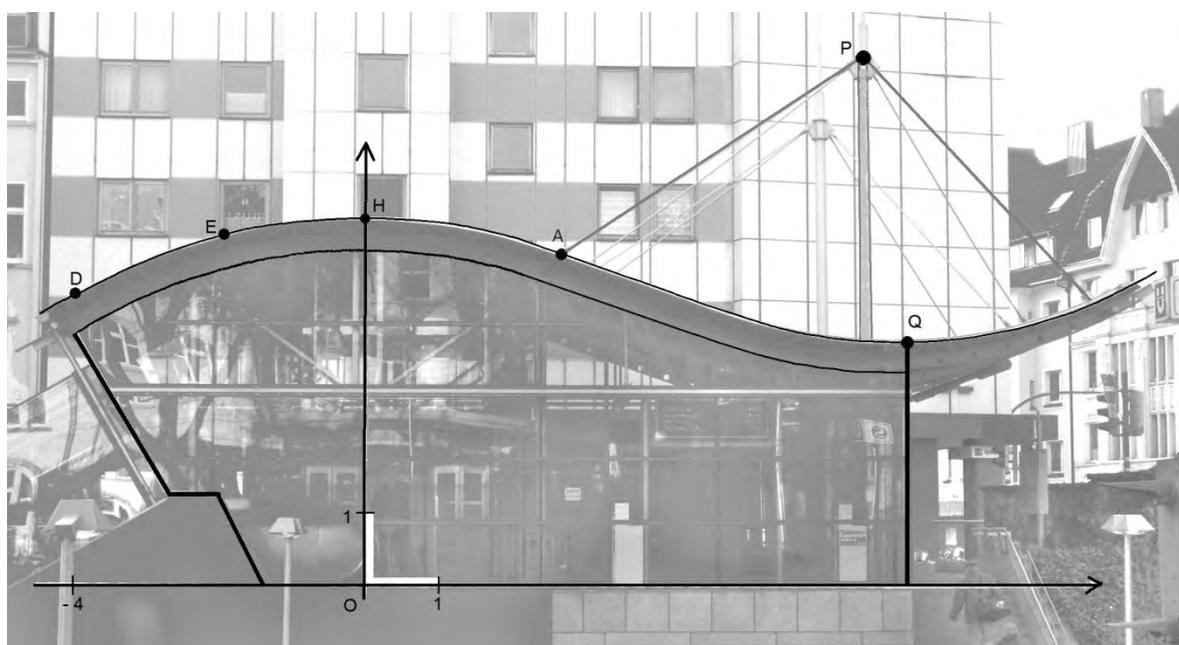


Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt das Eingangsgebäude zu einer U-Bahn-Haltestelle. Auf dem Foto schaut man frontal auf eine ebene Glasfläche, die sich unter dem geschwungenen Dach befindet. Eine Längeneinheit in dem eingezeichneten Koordinatensystem entspricht 1 m. Der höchste Punkt der Dachoberkante befindet sich in diesem Koordinatensystem bei $H(0 \mid 5,0)$ und der tiefste Punkt bei $Q(7,3 \mid 3,3)$. Auch die Punkte $D(-4 \mid 4)$ und $E(-2 \mid 4,75)$ liegen auf der Dachoberkante. Der Punkt A liegt an der Stelle $x = 2,7$. Die Profillinie der Dachoberkante hat eine geschwungene Form, die im Folgenden durch eine ganzrationale Funktion modelliert werden soll.



Name: _____

- a) (1) Die Profillinie hat im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ näherungsweise die Form einer Parabel 2. Grades.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel mit dem Hochpunkt H, die durch den Punkt D verläuft.

[Zur Kontrolle: $p(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$.]

- (2) *Begründen Sie anhand der Abbildung 1, warum eine ganzrationale Funktion, die zur Modellierung der gesamten Profillinie der Dachoberkante geeignet sein könnte, mindestens 3. Grades sein muss.*
- (3) *Geben Sie die allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades an.*

Ermitteln Sie aus den Informationen über die Punkte H und Q vier Bedingungen, mit denen alle Koeffizienten des Funktionsterms bestimmt werden können.

Geben Sie die Funktionsgleichung an.

(2 + 3 + 9 Punkte)

- b) Um den Verlauf der gesamten Profillinie der Dachoberkante im Bereich von $-4,5 \leq x \leq 10,5$ zu modellieren, wird im Folgenden die Parabelgleichung aus a) (1)

erweitert auf eine ganzrationale Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$, $a > 0$.

- (1) *Begründen Sie, warum durch diese Erweiterung die bei der Parabel vorhandene Symmetrie erhalten bleibt.*
- (2) *Abbildung 2 zeigt die Graphen von f_a für $a = 0,0002$, $a = 0,0004$ und $a = 0,0006$.*

Geben Sie an, welcher Parameterwert zu welchem Graphen gehört.



Name: _____

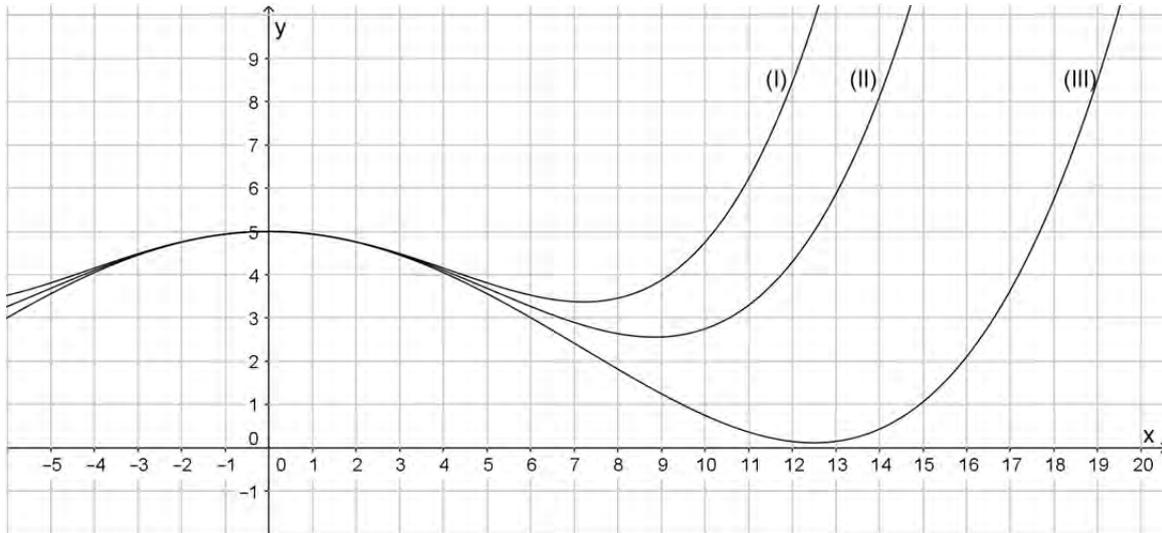


Abbildung 2

- (3) Bestimmen Sie den Tiefpunkt T_a des Graphen von f_a (mit $x \geq 0$) in Abhängigkeit von a .

[Kontrollergebnis: $T_a \left(\sqrt{\frac{1}{32 \cdot a}} \mid 5 - \frac{1}{32^2 \cdot a} \right)$]

- (4) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl der Nullstellen, die der Graph von f_a für $x \geq 0$ besitzt.

- (5) Damit der Graph von f_a ein Modell für die Dachoberkante darstellt, wird gefordert, dass im Bereich $x \geq 0$ der y -Wert des Tiefpunkts T_a mindestens 3,3 betragen und der x -Wert des Wendepunkts mindestens 4 sein soll.

Bestimmen Sie den Bereich für a , in welchem beide Bedingungen erfüllt sind.

(2 + 3 + 4 + 3 + 5 Punkte)

Im Folgenden wird die Profillinie der Dachoberkante im Bereich $-4,5 \leq x \leq 10,5$ durch den Graphen der auf \mathbb{R} definierten Funktion f mit $f(x) = 0,0006 \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$ modelliert.

Das Eingangsgebäude ist mit Glas verkleidet. Die eingezeichnete Oberkante der Glasfläche wird im Koordinatensystem von Abbildung 1 im Bereich von $-4 \leq x \leq 7,3$ durch die auf \mathbb{R}

definierte Funktion h mit $h(x) = 0,0006 \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 4,5$ modelliert.



Name: _____

c) Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass es sich bei der in Abbildung 1 umrahmten Glasfläche um eine durchgehende ebene Fläche handelt, die nicht durch Rahmen und Streben unterbrochen wird.

(1) Berechnen Sie den Inhalt der Glasfläche von der y -Achse bis zur eingezeichneten Kante durch den Punkt Q in der Ansicht aus Abbildung 1.

(2) Beschreiben Sie eine mögliche Lösungsidee zur Bestimmung des Inhalts der umrahmten Glasfläche links von der y -Achse. Geben Sie dabei alle nötigen Ansätze an, die Berechnung konkreter Werte wird hingegen nicht erwartet.

(3) Begründen Sie, dass die Fläche zwischen der Oberkante der Glasfläche und der Dachoberkante im Bereich von $-4 \leq x \leq 7,3$ inhaltsgleich ist zur Fläche eines Rechtecks der Länge 11,3 und der Höhe 0,5.

(4 + 5 + 4 Punkte)

d) Oberhalb des Daches sind geradlinig verlaufende Stahlseile angebracht. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass das Stahlseil von $A(2,7 | f(2,7))$ nach $P(6,7 | 7,2)$ verläuft.

Das Stahlseil wird für $2,7 \leq x \leq 6,7$ durch eine Gerade g modelliert.

Bestimmen Sie rechnerisch die Größe des Winkels, den die Gerade g mit der Tangente an den Graphen von f in A einschließt.

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
- Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
- Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
- Flächenberechnung durch Integration

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Parabel muss nach unten geöffnet sein und den Scheitelpunkt in $H(0|5)$ haben.

Mit dem Ansatz $p(x) = a \cdot x^2 + 5$ und Einsetzen der Koordinaten von $D(-4|4)$ erhält man $4 = a \cdot 16 + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{16}$ und somit die Funktionsgleichung $p(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$.

(2) Die Profillinie hat einen lokalen Hoch- und einen lokalen Tiefpunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.

Mögliche Alternativen in der Argumentation:

- Die Profillinie wechselt von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung, hat also einen Wendepunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.
- Bei einer ganzrationalen Funktion kann erst ab dem 3. Grad die 1. Ableitung mindestens zwei Nullstellen haben (notwendige Bedingung für die zwei Extremstellen der Funktion).

(3) Ansatz für eine ganzrationale Funktion 3. Grades:

$$k(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d, \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Der Hochpunkt $H(0|5,0)$ des Graphen von k liefert zwei Bedingungen: $k(0) = 5$ und $k'(0) = 0$.

Der Tiefpunkt $Q(7,3|3,3)$ liefert die Bedingungen: $k(7,3) = 3,3$ und $k'(7,3) = 0$.

Diese vier Bedingungen stellen ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von a , b , c und d dar, das mit dem CAS gelöst wird. Es ergibt sich die Funktionsgleichung

$$k(x) = 0,00874 \cdot x^3 - 0,09570 \cdot x^2 + 5.$$

[Da H und Q mit jeweils beiden Koordinaten gegeben sind, kann auf die Überprüfung mit einer hinreichenden Bedingung verzichtet werden.]

Teilaufgabe b)

- (1) Die Graphen von p und f_a sind achsensymmetrisch zur y -Achse, da die Funktionsterme nur Potenzen von x mit geraden Exponenten aufweisen.
- (2) Zeichnen der Graphen mit dem CAS oder Berechnung geeigneter Funktionswerte liefert: Graph (I) gehört zu $a = 0,0006$, Graph (II) gehört zu $a = 0,0004$ und Graph (III) gehört zu $a = 0,0002$.
- (3) Hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt: $f'_a(x_T) = 0 \wedge f''_a(x_T) > 0$.

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \sqrt{\frac{1}{32 \cdot a}} \vee x_3 = -\sqrt{\frac{1}{32 \cdot a}}.$$

$$x_3 \text{ liegt außerhalb des angegebenen Bereichs, } f''_a(x_1) = -\frac{1}{8} < 0.$$

$$\text{Da } f''_a(x_2) = \frac{1}{4} > 0, \text{ ist } x_2 \text{ eine Minimalstelle.}$$

$$\text{Der Tiefpunkt hat die Koordinaten } T_a \left(\sqrt{\frac{1}{32 \cdot a}} \mid 5 - \frac{1}{1024 \cdot a} \right).$$

- (4) Der Graph besitzt für $x \geq 0$ eine Nullstelle, wenn der Tiefpunkt auf der x -Achse liegt:

$$5 - \frac{1}{1024 \cdot a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5120} \approx 0,000195.$$

Für $a > \frac{1}{5120}$ liegt der Tiefpunkt im I. Quadranten, der Graph hat keine Nullstelle für

$x \geq 0$. Damit haben die Graphen mit $0 < a < \frac{1}{5120}$ zwei Nullstellen für $x \geq 0$.

- (5) 1. Bedingung: Der y -Wert des Tiefpunkts beträgt mindestens 3,3.

$$5 - \frac{1}{1024 \cdot a} \geq 3,3 \Leftrightarrow a \geq \frac{5}{8704} \approx 0,000575.$$

[Wegen der \geq -Relation wurde hier aufgerundet. Ein kaufmännisch auf 0,000574 abgerundeter Wert wird aber auch akzeptiert.]

2. Bedingung: Der x -Wert des Wendpunkts beträgt mindestens 4.

$$f''_a(x_w) = 0 \text{ hat für } x \geq 0 \text{ die Lösung } x_w = \sqrt{\frac{1}{96 \cdot a}}. \text{ Dieser Wert liegt zwischen der}$$

Maximal- und der Minimalstelle. Also handelt es sich bei x_w um die Wendestelle.

$$\sqrt{\frac{1}{96 \cdot a}} \geq 4 \Leftrightarrow a \leq 0,000651.$$

Zur Modellierung der Dachoberkante sind Parameterwerte aus dem Bereich

$0,000575 \leq a \leq 0,000651$ geeignet.

Teilaufgabe c)

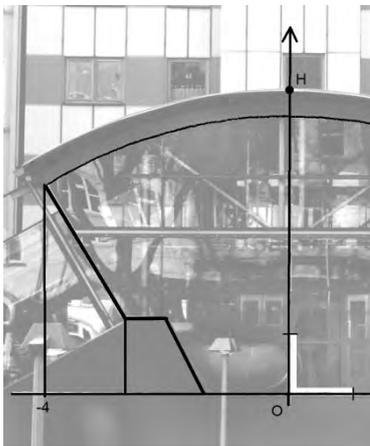
(1) Der Flächeninhalt wird durch Integration ermittelt:

$$\int_0^{7,3} h(x) dx \approx 27,23$$

Die Glasfläche ist etwa $27,23 \text{ m}^2$ groß.

(2) Als Lösung wird die Angabe einer geeigneten Ergänzung und Zerlegung mit Angabe des für die Berechnung erforderlichen Integrals und der Formeln für die Teilflächen erwartet.

Der folgende Bildausschnitt zeigt eine mögliche Zerlegung der ergänzten Fläche:



Mit dem Integral $\int_{-4}^0 h(x) dx$ wird der Flächeninhalt zwischen Glasoberkante und x-Achse berechnet. Davon müssen die Flächeninhalte der beiden eingezeichneten Trapeze subtrahiert werden. (Flächeninhalt eines Trapezes: $A = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$.)

$$(3) \int_{-4}^{7,3} (f(x) - h(x)) dx = \int_{-4}^{7,3} 0,5 dx = 0,5 \cdot (7,3 + 4) = 0,5 \cdot 11,3 = 5,65 .$$

Das Ergebnis entspricht dem Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks.

[Alternativ kann die Begründung auch auf argumentativem Weg erfolgen.]

Teilaufgabe d)

Die Steigung der Geraden g beträgt $m \approx \frac{7,2 - 4,58}{6,7 - 2,7} = 0,655$.

Mit $m = \tan(\alpha_1)$ folgt: $\tan(\alpha_1) \approx 0,655 \Rightarrow \alpha_1 \approx 33,2^\circ$.

g schließt mit der Horizontalen einen Winkel von ungefähr $33,2^\circ$ ein.

Für die Steigung der Tangente in A gilt: $f'(2,7) \approx -0,2903$.

Für den Winkel gegenüber der Horizontalen erhält man damit:

$\tan(\alpha_2) \approx -0,2903 \Rightarrow \alpha_2 \approx -16,2^\circ$. Damit schließt die Tangente mit der Geraden g einen

Winkel von ungefähr $16,2^\circ + 33,2^\circ = 49,4^\circ$ ein.

[Hinweis: Auch die Angabe des Nebenwinkels soll als richtig gewertet werden.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt eine Gleichung der Parabel.	2			
2	(2) begründet, warum eine ganzrationale Funktion zur Modellierung der Dachoberkante mindestens 3. Grades sein muss.	3			
3	(3) gibt den allgemeinen Term einer ganzrationalen Funktion 3. Grades an, ermittelt Bedingungen, mit denen alle Koeffizienten des Funktionsterms bestimmt werden können, und gibt die Funktionsgleichung an.	9			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
	Summe Teilaufgabe a)	14			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) begründet, warum die Symmetrie erhalten bleibt.	2			
2	(2) ordnet die Parameterwerte den Graphen zu.	3			
3	(3) bestimmt den Tiefpunkt T_a von f_a in Abhängigkeit von a .	4			
4	(4) ermittelt in Abhängigkeit von a die Anzahl der Nullstellen.	3			
5	(5) bestimmt den Bereich für a , in welchem beide Bedingungen erfüllt sind.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17)					
	Summe Teilaufgabe b)	17			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet den Inhalt der Glasfläche rechts von der y -Achse bis zur Kante durch den Punkt Q .	4			
2	(2) beschreibt eine mögliche Lösungsidee zur Bestimmung des Inhalts der Glasfläche links von der y -Achse.	5			
3	(3) begründet die Inhaltsgleichheit der Fläche zwischen Glas- und Dachoberkante und der Rechtecksfläche.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
Summe Teilaufgabe c)		13			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt rechnerisch die Größe des Winkels, den die Gerade g mit der Tangente in A einschließt.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe d)		6			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.



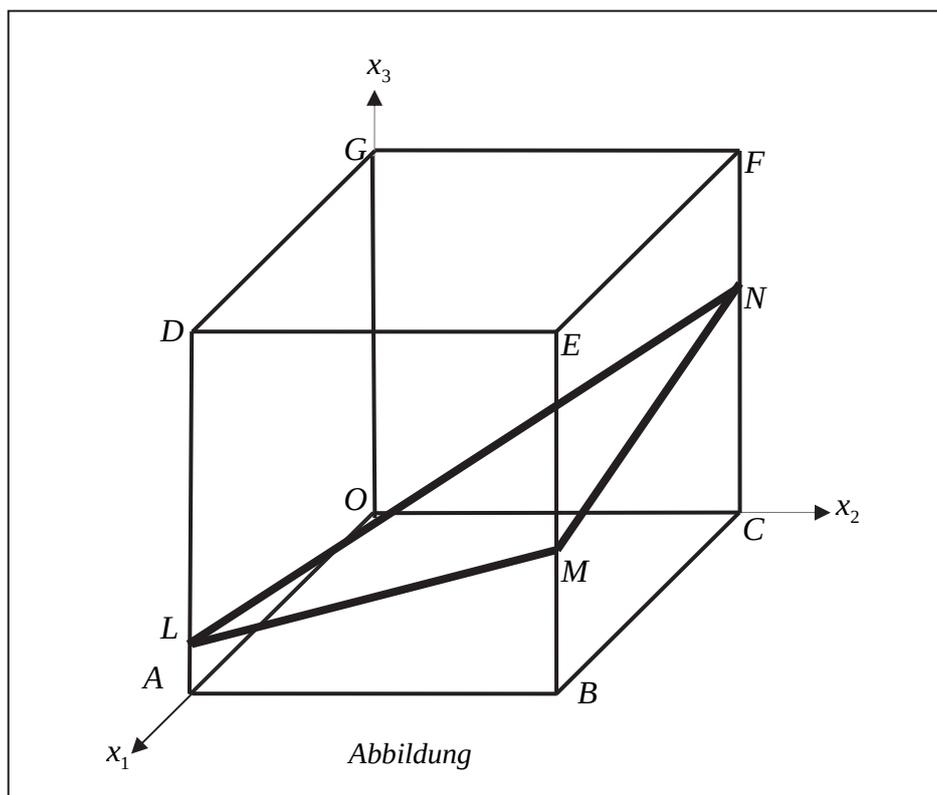
Name: _____

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(8|0|0)$, $B(8|8|0)$, $C(0|8|0)$, $D(8|0|8)$, $E(8|8|8)$, $F(0|8|8)$ und $G(0|0|8)$ Eckpunkte eines Würfels $OABCDEFG$. Außerdem sind die Punkte $L(8|0|1)$, $M(8|8|3)$ und $N(0|8|5)$ gegeben (siehe *Abbildung*).





Name: _____

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN gleichschenkelig ist.*

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN nicht rechtwinklig ist.*

(3) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks LMN.*

[Zur Kontrolle: Der Flächeninhalt des Dreiecks LMN beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$ [FE].]

(4 + 4 + 5 Punkte)

b) (1) *Ermitteln Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene H, die die Punkte L, M und N enthält.*

[Mögliches Ergebnis für die Koordinatengleichung: $H : x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$.]

(2) *Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide LMND.*

[Zur Kontrolle: Das Volumen der Pyramide LMND beträgt $74,6$ [VE].]

(3) *Berechnen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens das Pyramidenvolumen einnimmt.*

(7 + 6 + 3 Punkte)

c) (1) *Skizzieren Sie in der Abbildung das Schnittgebilde, das die Ebene H mit dem Würfel bildet.*

Das Schnittgebilde von Ebene und Würfel ist eine Raute.

(2) *Untersuchen Sie, ob der Punkt $S(2|6|4)$ in der Raute liegt.*

(3) *Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf der Geraden AB gibt, der von dem Punkt S den Abstand 7 [LE] besitzt.*

(3 + 3 + 7 Punkte)



Name: _____

d) Es gibt genau eine Gerade k durch M , die die Geraden LN und GF (außerhalb des Würfels) schneidet.

(1) *Begründen Sie, dass die Gerade k in der Ebene H liegt.*

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten eines zweiten Punktes der Geraden k .*

(4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. Inhaltliche Schwerpunkte

Vektorielle Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
- Normalenformen von Ebenengleichungen
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Abstandsprobleme

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) \text{ Aus } \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ folgt, dass } |\overrightarrow{LM}| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,25 \text{ [LE]}$$

ist. Daher ist das Dreieck LMN gleichschenkelig.

$$(2) \text{ Da } |\overrightarrow{LM}| = |\overrightarrow{MN}| \text{ ist, kann im Dreieck } LMN \text{ ein rechter Winkel höchstens im Punkt } M \text{ sein.}$$

$$\text{Da } \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \text{ gilt, ist das Dreieck } LMN \text{ nicht rechtwinklig.}$$

$$(3) \text{ Der Punkt } R(4 | 4 | 3) \text{ ist der Mittelpunkt der Strecke } \overline{LN}. \text{ Da das Dreieck } LMN$$

gleichschenkelig ist, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{LN}| \cdot |\overline{RM}|$.

$$\text{Aus } \overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ folgt, dass } |\overline{LN}| = \sqrt{144} = 12 \text{ [LE] und}$$

$$|\overline{RM}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ [LE] ist.}$$

$$A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \approx 33,94 \text{ [FE].}$$

Teilaufgabe b)

(1) Für eine Gleichung der Ebene H in Parameterform ergibt sich:

$$H: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r^* \cdot \overrightarrow{LM} + s^* \cdot \overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Es folgt: } H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r^*, s^*, r, s \in \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } \begin{vmatrix} x_1 = 8 & -2s \\ x_2 = 4r + 2s \\ x_3 = 1 + r + s \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & = & 8 & -2s \\ x_2 - 4x_3 & = & -4 & -2s \\ x_3 & = & 1 + r + s \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_2 - 4x_3 & = & -4 & -2s \\ x_3 & = & 1 + r + s \end{vmatrix}.$$

Es ergibt sich als mögliche Koordinatenform:

$$H: x_1 - x_2 + 4x_3 = 12.$$

(2) Für das Volumen der Pyramide $LMND$ gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta LMN} \cdot d(D, H).$$

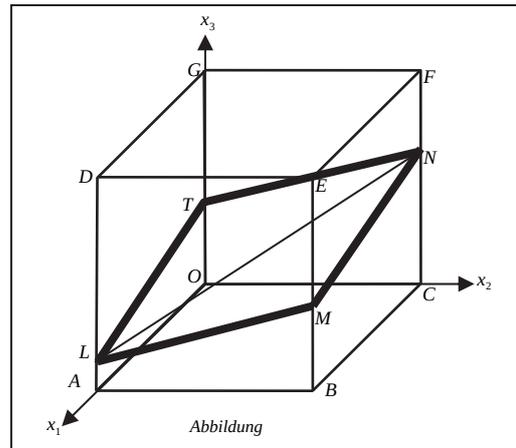
$$\text{HNF von } H: \frac{x_1 - x_2 + 4x_3 - 12}{\sqrt{18}} = 0 \Rightarrow d(D, H) = \frac{|8 + 4 \cdot 8 - 12|}{\sqrt{18}} = \frac{28}{\sqrt{18}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{28}{\sqrt{18}} = \frac{224}{3} = 74,6 \overline{6} [\text{VE}] \quad (\text{siehe a) (3)}).$$

$$(3) \frac{V_{\text{Tetraeder}}}{V_{\text{Würfel}}} = \frac{74,6 \overline{6}}{8^3} = 0,1458 \dots \approx 14,6 \ %.$$

Teilaufgabe c)

(1)



[Der Schnittpunkt T der x_3 -Achse mit der Ebene H ist $T(0 \mid 0 \mid 3)$.]

[Hinweis: In Aufgabenteil c) (1) ist auch eine „rein“ grafische Lösung mit Parallelen vorstellbar.]

- (2) Da alle Koordinaten von S zwischen 0 und 8 liegen, muss S im Würfel liegen. Da außerdem die Koordinaten von S die Koordinatengleichung von H erfüllen ($2 - 6 + 16 = 12$), liegt der Punkt S in der Raute.

- (3) Ein Richtungsvektor der Geraden h durch A und B ist $\vec{a}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine mögliche

Gleichung der Geraden h lautet: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (t \in \mathbb{R})$. $U_t(8 \mid t \mid 0) (t \in \mathbb{R})$ ist ein

beliebiger Punkt auf h .

Es ist $d(S, U_t) = \sqrt{36 + (t-6)^2 + 16} \cdot \sqrt{36 + (t-6)^2 + 16} = 7 \Rightarrow (t-6)^2 = -3 (t \in \mathbb{R})$.

Da ein Quadrat [in \mathbb{R}] keine negativen Werte annehmen kann, ist die Lösungsmenge der letzten Gleichung leer. Es folgt, dass damit auch die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung leer ist. Deswegen gibt es keinen Punkt der Geraden h , der von S den Abstand 7 [LE] besitzt.

Teilaufgabe d)

(1) Da die gesuchte Gerade k den Punkt M enthält und die Gerade LN schneidet, liegt sie in der Ebene, die durch M und die Gerade LN bestimmt ist. Nach b) (1) ist H diese Ebene.

(2) Ein zweiter Punkt der Geraden k ist z. B. der Schnittpunkt W von H und GF . Es ist

$$GF : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad W_t(0 | t | 8) \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ ist ein beliebiger Punkt auf der}$$

Geraden GF . W_t ist genau dann Schnittpunkt von GF und H , wenn gilt:

$$-t + 4 \cdot 8 = 12 \Leftrightarrow t = 20.$$

Eingesetzt in GF erhält man den Schnittpunkt $W(0 | 20 | 8)$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass das Dreieck <i>LMN</i> gleichschenkelig ist.	4			
2	(2) zeigt, dass das Dreieck <i>LMN</i> nicht rechtwinklig ist.	4			
3	(3) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks <i>LMN</i> .	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
Summe Teilaufgabe a)		13			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt eine Parametergleichung der Ebene <i>H</i> .	3			
2	(1) ermittelt eine Koordinatengleichung der Ebene <i>H</i> .	4			
3	(2) bestimmt das Volumen der Pyramide <i>LMND</i> .	6			
4	(3) berechnet, wie viel Prozent des Würfelvolumens das Pyramidenvolumen einnimmt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16)					
Summe Teilaufgabe b)		16			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) skizziert in der <i>Abbildung</i> das Schnittgebilde, das die Ebene H mit dem Würfel bildet.	3			
2	(2) untersucht, ob der Punkt $S(2 6 4)$ in der Raute liegt.	3			
3	(3) untersucht, ob es einen Punkt auf der Geraden AB gibt, der von dem Punkt S den Abstand $7 [LE]$ besitzt.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13)					
Summe Teilaufgabe c)		13			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass die Gerade k in der Ebene H liegt.	4			
2	(2) bestimmt die Koordinaten eines zweiten Punktes der Geraden k .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8)					
Summe Teilaufgabe d)		8			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Biologen wollen die Entwicklung einer Mäusebussardpopulation in einem Untersuchungsgebiet durch eine Matrix beschreiben. Dabei werden (auch in der gesamten folgenden Aufgabe) **ausschließlich** die **weiblichen Tiere** der Population betrachtet. Die Bussardpopulation besteht aus Küken (k), Jungvögeln (j), die noch nicht geschlechtsreif sind, und Altvögeln (a), die fortpflanzungsfähig sind. Die Küken entwickeln sich im Jahr nach dem Schlüpfen zu Jungvögeln und nach einem weiteren Jahr zu Altvögeln.

Nach Beobachtungen des Bestandes der Bussarde wurde vor ca. 25 Jahren zur Modellierung der Populationsentwicklung die Matrix

$$\begin{array}{l} \text{von :} \quad k \quad j \quad a \\ \text{nach :} \\ \begin{array}{l} k \\ j \\ a \end{array} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \end{array}$$

erstellt.

- a) (1) *Stellen Sie die Entwicklung der Bussardpopulation nach dem vorgeschlagenen Modell durch einen Übergangsgraphen dar und interpretieren Sie die Bedeutung der Matrixeinträge 0,6 und 0,79 im Sachzusammenhang.*
- (2) *Zur Simulation der Entwicklung der Population wurde von einem Bestand von 30 Küken, 30 Jungvögeln und 30 Altvögeln ausgegangen. Berechnen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Population für das nächste und das übernächste Jahr.*
- (3) *Berechnen Sie den Anteil der gerade geschlüpften Küken, die bei einer Modellierung mit der Matrix A drei Jahre später noch leben.*

(8 + 3 + 3 Punkte)



Name: _____

b) In einem Jahr wurden 50 Küken, 55 Jungvögel und 60 Altvögel im Beobachtungsgebiet gezählt.

Untersuchen Sie, ob es zu diesem Mäusebussardbestand eine Verteilung des Vorjahres auf die drei Entwicklungsstufen gibt, wenn man zur Modellierung der Population die Matrix A benutzt.

(4 Punkte)

c) (1) Bestimmen Sie x und y so, dass $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$ gilt.

[Zur Kontrolle: $x = 18$ und $y = 1$.]

(2) Interpretieren Sie den Sachverhalt aus c) (1) im Kontext.

(3) Geben Sie $A^n \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 60 \end{pmatrix}$ ($n \in \mathbb{N}$) als Vektor an.

(4 + 3 + 3 Punkte)

d) Veränderte Umweltbedingungen führen heute dazu, dass zur Modellierung jetzt die Matrix B gewählt wird:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

(1) Vergleichen Sie die Matrizen A und B im Sachzusammenhang.

(2) Für eine Population wird vorausgesetzt, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Anzahlen von Küken, Jungvögeln und Altvögeln übereinstimmen. Eine Forschungsgruppe behauptet, dass in diesem Fall die Gesamtzahl der Tiere nach der Modellierung in einem Zeitraum von 3 Jahren um 20 % zunimmt.

Beurteilen Sie die Aussage.

(3 + 6 Punkte)



Name: _____

e) (1) Zeigen Sie:

Wenn die Matrix $B_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \end{pmatrix}$ ($0 < u \leq 1$) eine stationäre Verteilung

$\vec{s} \neq \vec{0}$ besitzt, dann muss $0,58 \leq v < 1$ gelten.

(2) In einem Beobachtungsgebiet leben zurzeit in den drei Entwicklungsstufen der Bussardpopulation zusammen 106 Tiere.

Bestimmen Sie die Anzahlen von Küken, Jungvögeln und Altvögeln der stationären Verteilung mit insgesamt 106 Tieren, wenn zur Modellierung der Bussardpopulation

die Matrix $B_{u,0,685} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0,685 \end{pmatrix}$ verwendet wird.

(7 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. Inhaltliche Schwerpunkte

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Matrizenrechnung

- Übergangsmatrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
- Fixvektoren

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

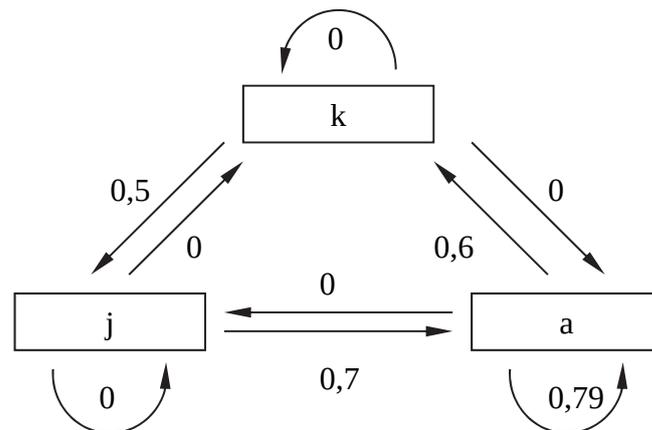
¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Übergangsgraph:



Der Matrixeintrag 0,6 gibt die durchschnittliche Anzahl von weiblichen Bussardküken an, die von einem Bussardweibchen pro Jahr ausgebrütet werden.

Der Matrixeintrag 0,79 gibt den Anteil von (weiblichen) Altvögeln an, die das nächste Lebensjahr erreichen.

(2) Berechnung der Verteilungsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 für das nächste und das übernächste Jahr:

$$\vec{v}_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 44,7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 46,05 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Modell wird nach einem Jahr ein Bestand von 18 Küken, 15 Jungvögeln und 45 Altvögeln und nach zwei Jahren ein Bestand von 27 Küken, 9 Jungvögeln und 46 Altvögeln erreicht.

(3) Anteil = $0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,79 = 0,2765$. Knapp 28 % der Küken leben drei Jahre später noch.

Teilaufgabe b)

Für die gesuchte Verteilung mit dem Verteilungsvektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 55 \\ 60 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = 83,\bar{3} \\ v_1 = 110 \\ v_2 = -8,\bar{3} \end{cases}.$$

Da keine Komponente des Verteilungsvektors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ negativ sein kann, gibt es bei einer

Modellierung durch die Matrix A keine Verteilung des Vorjahres auf die drei Entwicklungsstufen.

Teilaufgabe c)

$$(1) \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 = 18 \\ x = 18 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Es ist $x = 18$ und $y = 1$.

- (2) Nach der Modellierung gibt es für 9 Jungvögel und 30 Altvögel genau eine Verteilung von Küken, Jungvögeln und Altvögeln, die im folgenden Jahr zu einem Vielfachen bzw. einer Gleichheit der Populationsverteilung führt. Diese Verteilung umfasst 18 Küken und führt zu einer – bezogen auf Anzahlen in den drei Altersklassen – sich nicht ändernden Population.

$$(3) \quad A^n \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe d)

- (1) Nach einer Modellierung durch Matrix B sind im Vergleich zu einer Modellierung durch Matrix A die durchschnittliche Nachkommenzahl pro Jahr der Altvögel und die Überlebensraten (in jedem Altersstadium) erhöht. Deswegen wächst die Population nach einer Modellierung durch Matrix B stärker als nach einer Modellierung durch Matrix A .

$$(2) \quad B^3 \cdot \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,183v \\ 0,651v \\ 1,667v \end{pmatrix}.$$

Gesamtzahl der Tiere zu Beginn: $v + v + v = 3v$.

Gesamtzahl der Tiere nach drei Jahren: $1,183v + 0,651v + 1,667v = 3,501v$.

$$(3,501v) : (3v) = 1,167.$$

Die Behauptung der Forschungsgruppe ist falsch, da die Zunahme der Anzahl der Tiere nur 16,7 % beträgt.

Teilaufgabe e)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7s_3 = s_1 \\ 0,6s_1 = s_2 \\ u \cdot s_2 + v \cdot s_3 = s_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 0,7s_3 \\ s_2 = 0,42s_3 \\ (1 - 0,42u - v) \cdot s_3 = 0 \end{cases}.$$

$$(1 - 0,42u - v) \cdot s_3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,42u - v = 0 \vee s_3 = 0.$$

$s_3 = 0$ kann nicht gelten, da sonst auch $s_1 = 0$ und $s_2 = 0$ und damit $\vec{s} = \vec{0}$ sein würde.

Das steht im Widerspruch zu $\vec{s} \neq \vec{0}$.

Deswegen muss $1 - 0,42u - v = 0$ sein.

Aus $0 < u \leq 1$ und $v = 1 - 0,42u$ folgt, dass $0,58 \leq v < 1$ gelten muss.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0,685 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 106 - s_1 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 106 - s_1 - s_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 35 \\ s_2 = 21 \\ u = 0,75 \end{cases}.$$

Bei der gesuchten stationären Verteilung befinden sich 35 Küken und 21 Jungvögel und $106 - 35 - 21 = 50$ Altvögel in der Population.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) stellt die Entwicklung der Bussardpopulation nach dem vorgeschlagenen Modell durch einen Übergangsgraphen dar.	5			
2	(1) interpretiert die Bedeutung der Matrixeinträge 0,6 und 0,79 im Sachzusammenhang.	3			
3	(2) berechnet die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Population für das nächste und das übernächste Jahr.	3			
4	(3) berechnet den Anteil der gerade geschlüpften Küken, die bei einer Modellierung mit der Matrix <i>A</i> drei Jahre später noch leben.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
Summe Teilaufgabe a)		14			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	untersucht, ob es zu diesem Mäusebussardbestand eine Verteilung des Vorjahres auf die drei Entwicklungsstufen gibt, wenn man zur Modellierung der Population die Matrix <i>A</i> benutzt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe b)		4			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt x und y so, dass $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$ gilt.	4			
2	(2) interpretiert den Sachverhalt aus c) (1) im Kontext.	3			
3	(3) gibt $A^n \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 60 \end{pmatrix}$ ($n \in \mathbb{N}$) als Vektor an.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
Summe Teilaufgabe c)		10			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) vergleicht die Matrizen A und B im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) beurteilt die Aussage.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9)					
Summe Teilaufgabe d)		9			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	<p>(1) zeigt: Wenn die Matrix $B_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \end{pmatrix}$ ($0 < u \leq 1$) eine stationäre Verteilung $\vec{s} \neq \vec{0}$ besitzt, dann muss $0,58 \leq v < 1$ gelten.</p>	7			
2	<p>(2) bestimmt die Anzahlen von Kühen, Jungvögeln und Altvögeln der stationären Verteilung mit insgesamt 106 Tieren, wenn zur Modellierung der Bussardpopulation die Matrix $B_{u,0,685} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0,685 \end{pmatrix}$ verwandt wird.</p>	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modellösung: (13)					
.....					
.....					
Summe Teilaufgabe e)		13			

Summe insgesamt	50			
------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Nutzung von sozialen Netzwerken wird immer beliebter. Dabei nutzen immer mehr Jugendliche verschiedene soziale Netzwerke. Es wird davon ausgegangen, dass 30 % aller Jugendlichen das (fiktive) soziale Netzwerk „Freundschaftsbuch“ nutzen.

Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit dafür verwendet werden, dass eine zufällig befragte jugendliche Person „Freundschaftsbuch“ nutzt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Jugendlichen

- (1) genau 33 Jugendliche „Freundschaftsbuch“ nutzen,
- (2) höchstens 25 Jugendliche „Freundschaftsbuch“ nutzen,
- (3) die Anzahl der jugendlichen Nutzer, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, einem Wert entspricht, der sich um maximal 5 vom Erwartungswert unterscheidet.

(2 + 3 + 5 Punkte)

b) Ermitteln Sie (ggf. durch Probieren), welche positive Anzahl an Jugendlichen mindestens zufällig ausgewählt werden muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % maximal einen Jugendlichen antrifft, der „Freundschaftsbuch“ nutzt.

(6 Punkte)



Name: _____

- c) In einer Schule gibt es zur schulinternen Kommunikation ein eigenes Netzwerk, das sowohl von Jugendlichen genutzt wird, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, als auch von Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nicht nutzen. Dabei ist in beiden Gruppen der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, identisch. Im Folgenden wird dieser Anteil mit h bezeichnet und auch als Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Fall verwendet.
- (1) Zeigen Sie, dass man den Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, mit Hilfe des Terms $0,3 \cdot (1 - h) + 0,7h$ beschreiben kann, und erklären Sie die einzelnen Bestandteile des Terms.
 - (2) Berechnen Sie den Anteil aller Jugendlichen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, wenn der Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, bei $0,4$ liegt.
 - (3) Berechnen Sie für $h = 0,25$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte jugendliche Person mindestens eines der beiden Netzwerke nutzt.
 - (4) Eine zufällig ausgewählte jugendliche Person nutzt das schulinterne Netzwerk. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sie „Freundschaftsbuch“ nicht nutzt, und erklären Sie, wieso dieser Wert auch ohne einen Ansatz über bedingte Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden kann.

(5 + 2 + 3 + 4 Punkte)

d) Die Schülervertretung möchte, dass der Nutzungsgrad des schulinternen Netzwerks verbessert wird. Dazu soll mit Aktionen das schulinterne Netzwerk bekannter gemacht werden. Nach einem Jahr möchte die Schülervertretung die Vermutung überprüfen, dass der Nutzungsgrad von vormals 25 % gestiegen ist, und möchte dazu 50 zufällig ausgewählte Jugendliche der Schule befragen.

- (1) Geben Sie eine geeignete Nullhypothese an und ermitteln Sie eine passende Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.
- (2) Bei der Befragung kommt heraus, dass 19 Jugendliche das schulinterne Netzwerk nutzen.
Beurteilen Sie die Situation aus Sicht der Schülervertretung.



Name: _____

Zum Signifikanzniveau von $\alpha = 0,025$ ergibt sich die Entscheidungsregel: „Verwirf die Nullhypothese, falls 20 oder mehr Jugendliche das schulinterne Netzwerk nutzen.“

- (3) In den Abbildungen 1 – 4 sind die Wahrscheinlichkeiten der jeweils angegebenen Binomialverteilung als Säulen dargestellt. Die Höhe der Säule zum Wert k entspricht dabei $P(X = k)$.

Stellen Sie den Bereich, in dem die Nullhypothese abgelehnt wird, in Abbildung 1 grafisch dar.

- (4) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 % liegt.*

- (5) Bei gleich bleibender Entscheidungsregel und steigendem Nutzungsgrad wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art immer kleiner.

Erklären Sie, inwieweit dies an den Abbildungen 2 bis 4 abgelesen werden kann.

(6 + 2 + 3 + 5 + 4 Punkte)

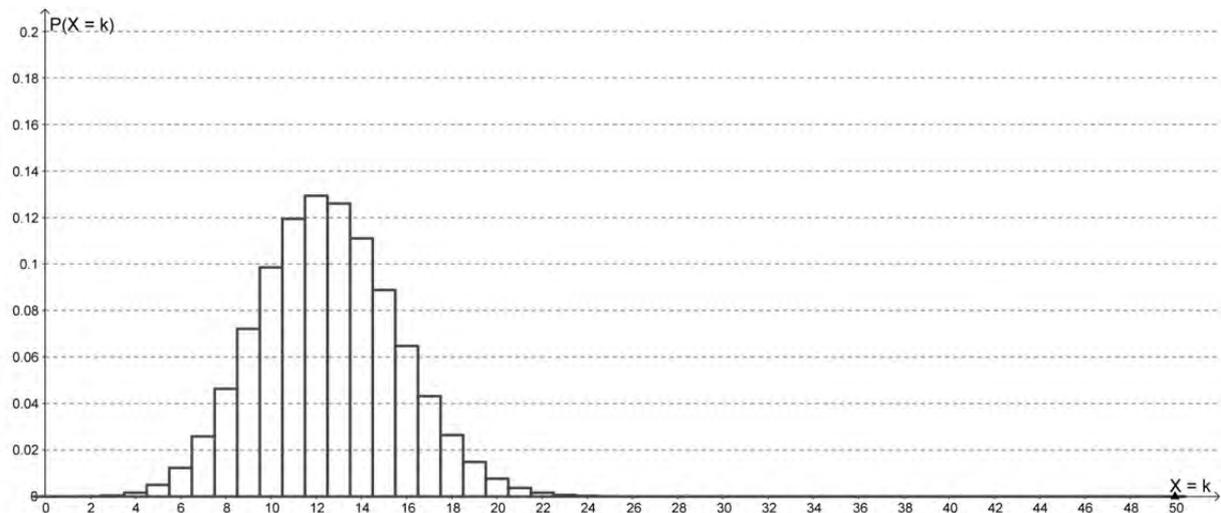


Abbildung 1: Binomialverteilung für $p = 0,25$ und $n = 50$



Name: _____

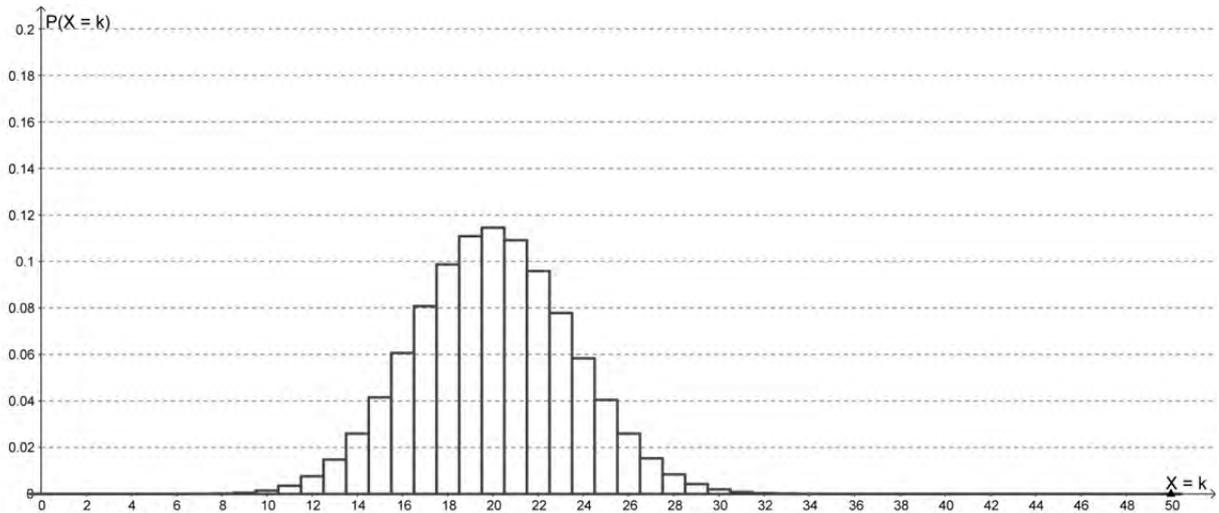


Abbildung 2: Binomialverteilung für $p = 0,4$ und $n = 50$

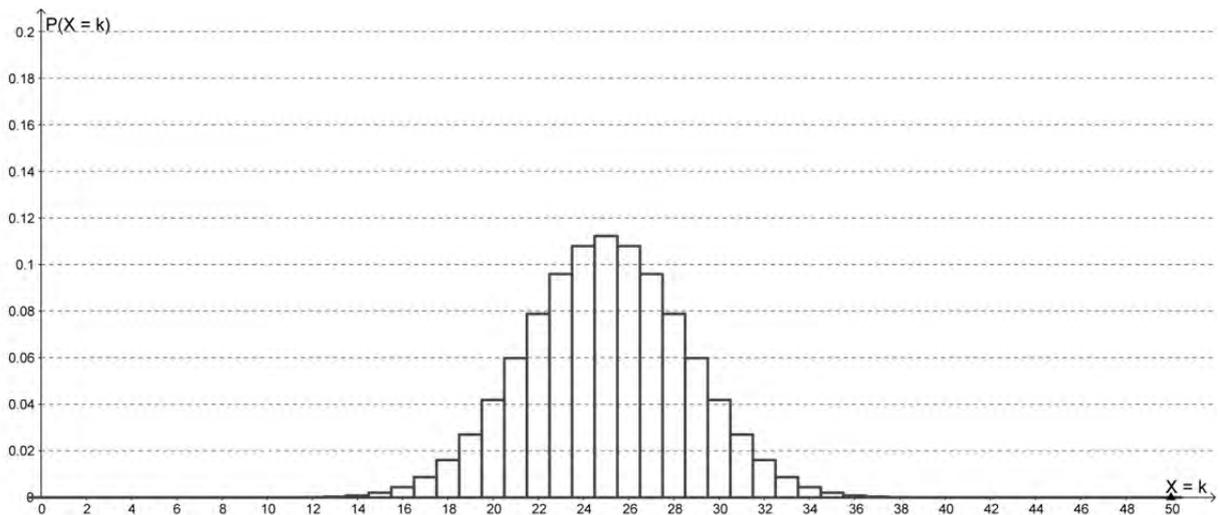


Abbildung 3: Binomialverteilung für $p = 0,5$ und $n = 50$

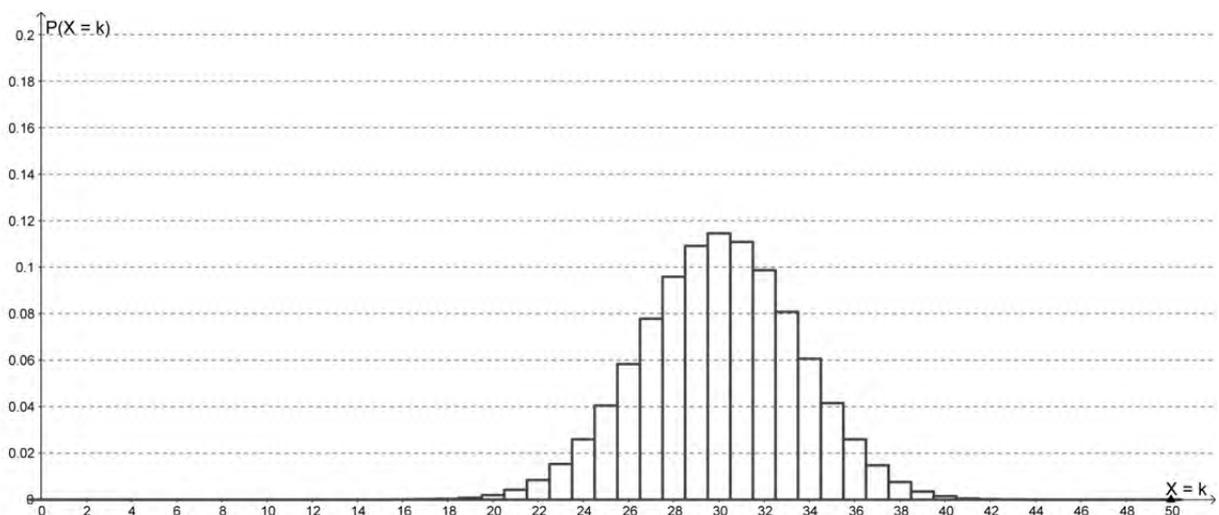


Abbildung 4: Binomialverteilung für $p = 0,6$ und $n = 50$



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ -Regeln:

$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$	$P(\mu - 1,64\sigma \leq X) \approx 0,95$
	$P(X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$	$P(\mu - 1,96\sigma \leq X) \approx 0,975$
	$P(X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,975$
$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$	$P(\mu - 2,58\sigma \leq X) \approx 0,995$
	$P(X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,995$

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1\sigma \leq X) \approx 0,841$
	$P(X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,841$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$	$P(\mu - 2\sigma \leq X) \approx 0,977$
	$P(X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,977$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 3\sigma \leq X) \approx 0,999$
	$P(X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,999$



Name: _____

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 10$ und $n = 20$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p										
n	k	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		n
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9		
11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8		
12							0,9998	0,9987	0,8684	7		
13								0,9997	0,9423	6		
14									0,9793	5		
15									0,9941	4		
16									0,9987	3		
17									0,9998	2		
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilungen für $n = 50$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p										n	
		0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3		0,4
50	0	0,0769	0,0266	0,0052	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49
	1	0,2794	0,1265	0,0338	0,0029	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48
	2	0,5405	0,3108	0,1117	0,0142	0,0066	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	47
	3	0,7604	0,5327	0,2503	0,046	0,0238	0,0057	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	46
	4	0,8964	0,729	0,4312	0,1121	0,0643	0,0185	0,0021	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	45
	5	0,9622	0,865	0,6161	0,2194	0,1388	0,048	0,007	0,003	0,0007	0,0001	0,0000	44
	6	0,9882	0,9417	0,7702	0,3613	0,2506	0,1034	0,0194	0,0089	0,0025	0,0005	0,0000	43
	7	0,9968	0,978	0,8779	0,5188	0,3911	0,1904	0,0453	0,0228	0,0073	0,0017	0,0001	42
	8	0,9992	0,9927	0,9421	0,6681	0,5421	0,3073	0,0916	0,0503	0,0183	0,005	0,0002	41
	9	0,9998	0,9978	0,9755	0,7911	0,683	0,4437	0,1637	0,0979	0,0402	0,0127	0,0008	40
	10		0,9994	0,9906	0,8801	0,7986	0,5836	0,2622	0,1701	0,0789	0,0284	0,0022	39
	11		0,9999	0,9968	0,9372	0,8827	0,7107	0,3816	0,2671	0,139	0,057	0,0057	38
	12			0,999	0,9699	0,9373	0,8139	0,511	0,3837	0,2229	0,1035	0,0133	37
	13			0,9997	0,9868	0,9693	0,8894	0,637	0,5099	0,3279	0,1715	0,028	36
	14			0,9999	0,9947	0,9862	0,9393	0,7481	0,6331	0,4468	0,2612	0,054	35
	15				0,9981	0,9943	0,9692	0,8369	0,7425	0,5692	0,369	0,0955	34
	16				0,9993	0,9978	0,9856	0,9017	0,8311	0,6839	0,4868	0,1561	33
	17				0,9998	0,9992	0,9937	0,9449	0,8966	0,7822	0,6046	0,2369	32
	18				0,9999	0,9997	0,9975	0,9713	0,941	0,8594	0,7126	0,3356	31
	19					0,9999	0,9991	0,9861	0,9686	0,9152	0,8036	0,4465	30
	20						0,9997	0,9937	0,9845	0,9522	0,8741	0,561	29
	21						0,9999	0,9974	0,9929	0,9749	0,9244	0,6701	28
	22							0,999	0,9969	0,9877	0,9576	0,766	27
	23							0,9996	0,9988	0,9944	0,9778	0,8438	26
	24							0,9999	0,9996	0,9976	0,9892	0,9022	25
	25								0,9998	0,9991	0,9951	0,9427	24
	26									0,9997	0,9979	0,9686	23
	27									0,9999	0,9992	0,984	22
	28										0,9997	0,9924	21
	29										0,9999	0,9966	20
	30											0,9986	19
	31											0,9995	18
	32											0,9998	17
33											0,9999	16	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	k

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilungen für $n = 100$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p										n	k		
		0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3			0,4	
100	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	100
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0000	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0000	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0000	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0000	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0000	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0000	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0000	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0000	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0000	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0000	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0000	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0000	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0000	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,0000	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	0,0000	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	0,0000	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	0,0000	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	0,0000	51	
	49										0,9996	0,9729	0,0000	50	
	50										0,9998	0,9832	0,0000	49	
	51										0,9999	0,9900	0,0000	48	
	52											0,9942	0,0000	47	
53											0,9968	0,0000	46		
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	k	n	

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 5: Normalverteilung

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
- Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße X : „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,3$ und $n = 100$.

(1) $P(X = 33) \approx 0,069$.

(2) $P(X \leq 25) \approx 0,163$.

(3) Da der Erwartungswert $\mu = 100 \cdot 0,3 = 30$ ist, wird die Wahrscheinlichkeit für $25 \leq X \leq 35$ gesucht. Es ist

$$P(25 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 24) \approx 0,884 - 0,114 = 0,770.$$

Teilaufgabe b)

Die Zufallsgröße X : „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann weiterhin als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,3$ und unbekanntem n .

Dann ist n so zu bestimmen, dass $P(X \leq 1) \leq 0,05$ gilt:

$$P(X \leq 1) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) \leq 0,05 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^n + \binom{n}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^{n-1} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow 0,7^n + n \cdot 0,3 \cdot 0,7^{n-1} \leq 0,05.$$

Durch Ausprobieren erhält man für $n = 13$ bzw. $n = 14$:

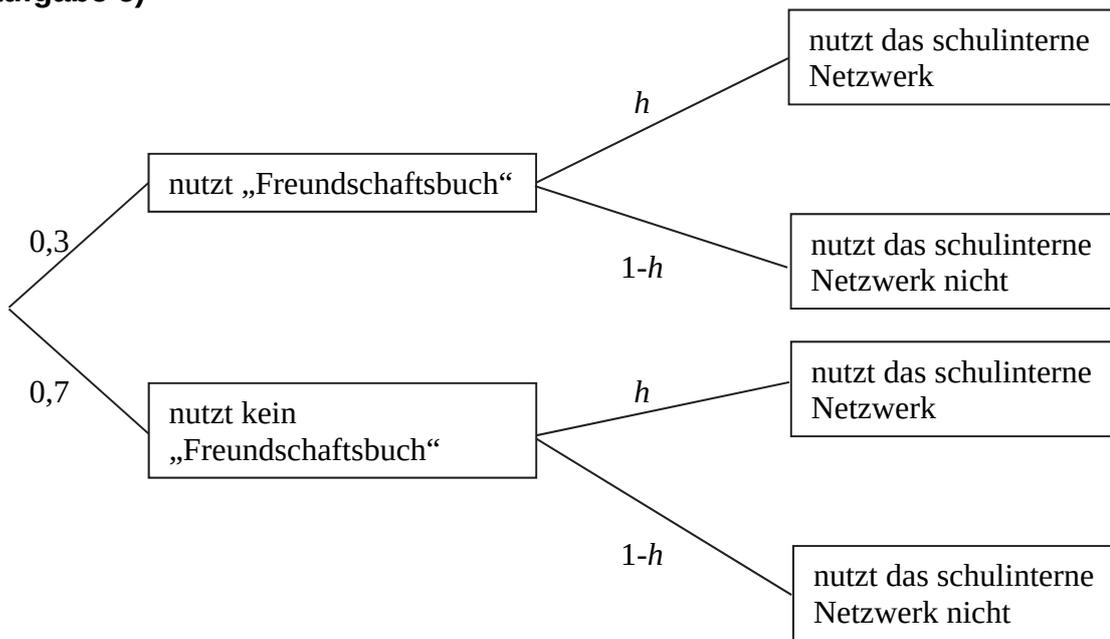
$$0,7^{13} + 13 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{13-1} \approx 0,064 > 0,05,$$

$$0,7^{14} + 14 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{14-1} \approx 0,047 < 0,05.$$

Es müssen also mindestens 14 Jugendliche ausgewählt werden.

Teilaufgabe c)

(1)



Den Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, aber nicht das schulinterne Netzwerk, kann man mit Hilfe des Terms $0,3 \cdot (1-h)$ angeben. Der Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nicht nutzen, dafür aber das schulinterne Netzwerk, kann mit Hilfe des Terms $0,7h$ angegeben werden (Pfadregel). Damit ist der Anteil derjenigen, die genau eines der beiden Netzwerke nutzen, die Summe der beiden Terme.

(2) Es ist also $0,3 \cdot (1-h) + 0,7h = 0,4 \Leftrightarrow h = 0,25$.

(3) Es ist

$$\begin{aligned} &P(\text{"nutzt mindestens eines der beiden Netzwerke"}) \\ &= P(\text{"nutzt genau eines der beiden Netzwerke"}) + P(\text{"nutzt beide Netzwerke"}) \\ &= 0,4 + 0,075 = 0,475. \end{aligned}$$

(4) Da der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, unabhängig von der Nutzung von „Freundschaftsbuch“ ist, gilt

$$\begin{aligned} &P_{\text{nutzt das schulinterne Netzwerk}}(\text{"nutzt Freundschaftsbuch nicht"}) \\ &= P(\text{"nutzt Freundschaftsbuch nicht"}) \\ &= 1 - P(\text{"nutzt Freundschaftsbuch"}) = 0,7. \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit kann das Ergebnis ohne einen Ansatz über bedingte Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

Teilaufgabe d)

- (1) Mit der Wahl von $H_0 : p \leq 0,25$ als Nullhypothese kann die Vermutung entsprechend überprüft werden. Dabei kann die Zufallsgröße X : „Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks“ mit $n = 50$ als binomialverteilt angenommen werden.

Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man

$$P_{p=0,25}(18 \leq X) = 1 - P_{p=0,25}(X \leq 17) \approx 0,055 > 0,05 \text{ und}$$

$$P_{p=0,25}(19 \leq X) = 1 - P_{p=0,25}(X \leq 18) \approx 0,029 < 0,05.$$

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:

Verwirf die Nullhypothese, falls $X \geq 19$, also 19 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen.

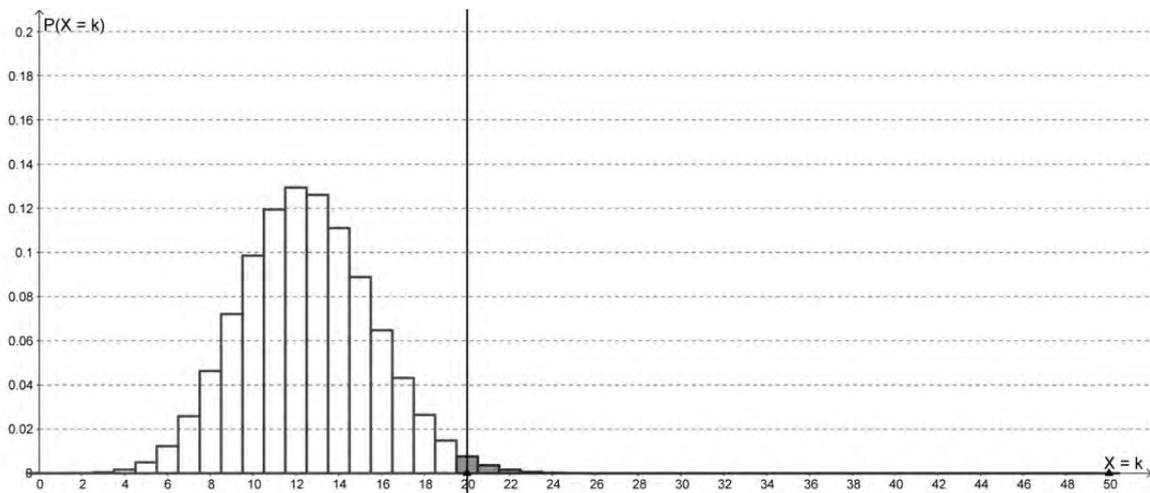
[Alternative: Es ist $\mu = 50 \cdot 0,25 = 12,5$ und $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 3,062 > 3$, womit die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Es gilt also $P(X < \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$.

Als Grenze ergibt sich $\mu + 1,64\sigma \approx 12,5 + 1,64 \cdot 3,062 \approx 17,522$ und somit lautet die Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls $X \geq 18$, also 18 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen. (Diese Lösung wird ebenfalls akzeptiert, obwohl in diesem Fall das Signifikanzniveau nicht eingehalten wird.)]

- (2) Im Fall $X = 19$ ist die Nullhypothese zu verwerfen. Die Schülervvertretung bewertet ihre Aktionen also als gelungen.

- (3) In der Abbildung sind alle Wahrscheinlichkeiten für $X \geq 20$ gekennzeichnet.



Die markierten Wahrscheinlichkeiten geben den Ablehnungsbereich an, also die Ausgänge, bei denen die Nullhypothese verworfen würde.

- (4) Macht die Schülervvertretung den Fehler 2. Art, so verwirft sie aufgrund der Umfrage die Nullhypothese nicht und bewertet ihre Aktionen als nicht gelungen, und das, obwohl sich die Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks erhöht hat. Liegt der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 %, so liegt die Auftrittswahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art mit $p = 0,4$, $n = 50$ und gegebener Grenze bei 20 bei $\beta = P_{p=0,4}(X \leq 19) = 0,447$.
- (5) Mit größer werdendem Nutzungsgrad wächst der Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeitsverteilung verschiebt sich in den Diagrammen somit nach rechts. Als Folge daraus ergibt sich, dass sich die durch die Säulen dargestellten Wahrscheinlichkeiten für $X \leq 19$ verkleinern. Diese Wahrscheinlichkeiten geben zusammen die Auftrittswahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art an. Damit kann die kleiner werdende Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art in den Abbildungen mit steigendem Nutzungsgrad abgelesen werden.

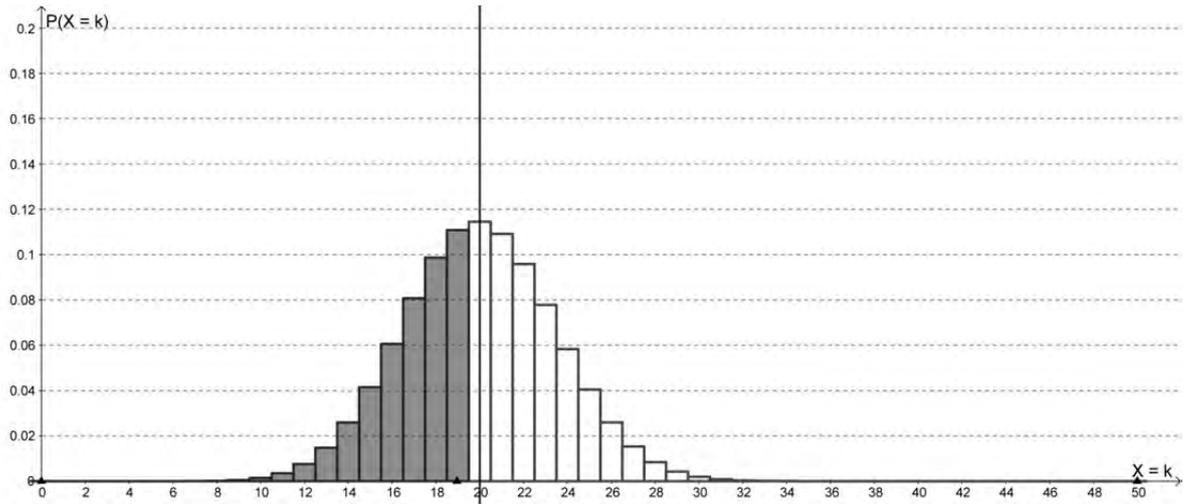


Abbildung 2: Binomialverteilung für $p = 0,4$ und $n = 50$

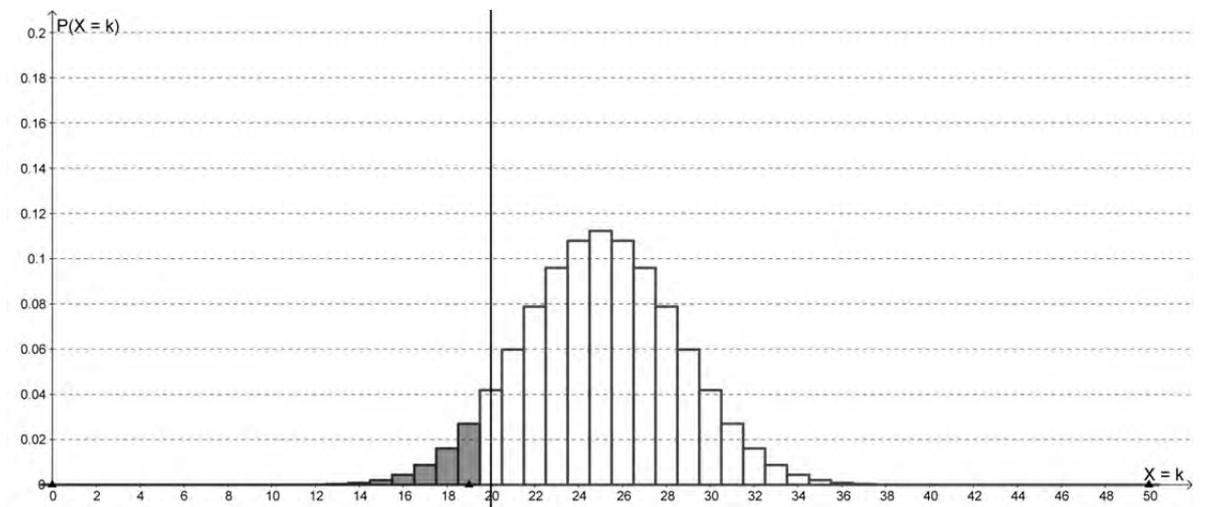


Abbildung 3: Binomialverteilung für $p = 0,5$ und $n = 50$

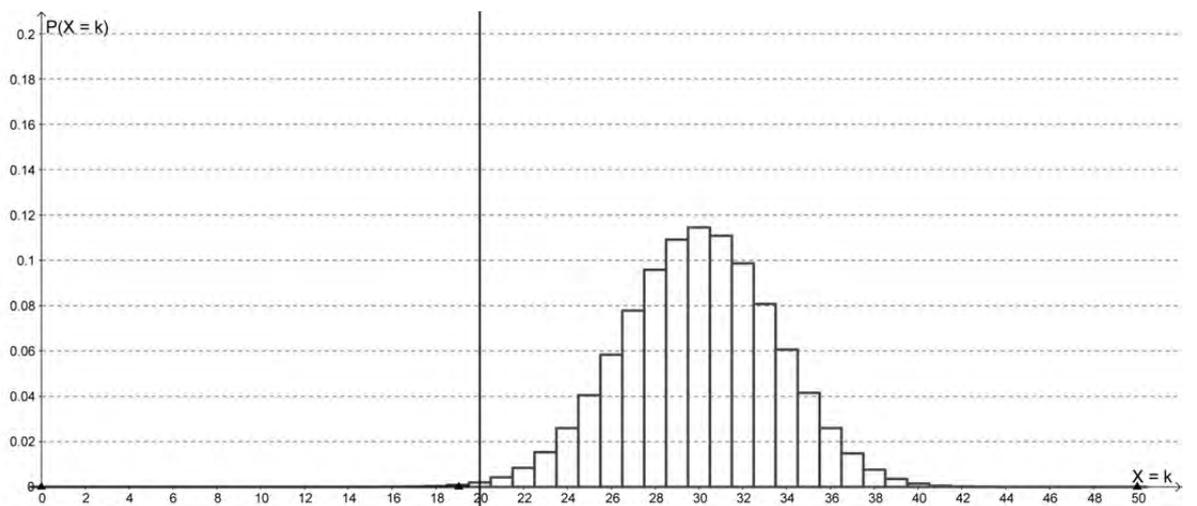


Abbildung 4: Binomialverteilung für $p = 0,6$ und $n = 50$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
Summe Teilaufgabe a)		10			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	stellt die Ungleichung auf.	3			
2	ermittelt die gesuchte Anzahl.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6)					
Summe Teilaufgabe b)		6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) zeigt die Gültigkeit des Terms.	2			
2	(1) erklärt die einzelnen Bestandteile.	3			
3	(2) berechnet den gesuchten Anteil.	2			
4	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
5	(4) gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.	2			
6	(4) erklärt, wieso dieser Wert auch ohne einen Ansatz über bedingte Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden kann.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
	Summe Teilaufgabe c)	14			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) gibt eine geeignete Nullhypothese an.	2			
2	(1) ermittelt eine passende Entscheidungsregel.	4			
3	(2) beurteilt die Situation angemessen.	2			
4	(3) stellt den Ablehnungsbereich grafisch dar.	3			
5	(4) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.	2			
6	(4) berechnet die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Fehlers 2. Art.	3			
7	(5) erklärt, inwieweit die Aussage an den Abbildungen abgelesen werden kann.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20)					
	Summe Teilaufgabe d)	20			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOST

Die Klausur wird abschließend mit der Note _____ (_____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 60
mangelhaft plus	3	59 – 50
mangelhaft	2	49 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0