Formelsammlung

Analysis (Differential- und Integralrechnung):

Potenzgesetze:

Multiplikation und Division

bei gleichen Basen:	$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$	$a \in \mathbb{R}$ $m,n \in \mathbb{Q}$
	$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $m,n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$a,b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Q}$
	$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$	$a,b \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$	$a \in \mathbb{R}$ $m,n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$	$a \in \mathbb{R}^*_+$ $m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$\boxed{a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}}$	$a \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$

Dreieck:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

U = a + b + c

Trapez:

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

U = a + b + c + d

Kreis:

$A = r^2 \cdot \pi$

$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

Zylinder:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Kegel:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Binomische Formeln:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Satz des Pythagoras:

$c^2 = a^2 + b^2$

pq-Formel:

Eine Gleichung der Form
$x^2+px+q=0$ hat die Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Winkelfunktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Umrechnung Steigung/Prozent:

(α = Winkel in °, m = Steigung) $\quad m = \tan(\alpha) \quad \alpha = \tan^{-1}(m)$

Durchschnittliche Steigung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ableitung ganzrationaler Funktionen:

$$f(x) = b \cdot x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot b \cdot x^{n-1}$$

(vollständige)**Funktionsuntersuchung**(Kurvendiskussion)**:**

y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x)$$

Nullstelle: $f(x)=0$

Extremstelle: $f'(x)=0$

Wendestelle: $f''(x)=0$

Tangentengleichung:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Normalengleichung:

$$\mathrm{N}(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Hauptsatz:

$$\int_a^b f_{(x)}\, dx = F(b) - F(a)$$

mit $F(x)$ = Stammfunktion von $f(x)$

Mittelwert einer Funktion:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f_{(x)}\, dx$$

Volumen von Rotationkörpern:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f_{(x)})^2\, dx$$

Bogenlänge:

$$L_{(a,b)} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_{(x)})^2}\, dx$$

Integration durch lineare Substitution:

$$\int_a^b f_{(mx+b)}\, dx = \frac{1}{m} \cdot \left[F_{(mx+b)}\right]_a^b$$

Matrizenrechnung:

Cramersche Regel: $x_1 = \frac{Det(A_1)}{Det(A)}$ $x_2 = \frac{Det(A_2)}{Det(A)}$ $x_3 = \frac{Det(A_3)}{Det(A)}$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot a_1 + y_1 \cdot a_2 + z_1 \cdot a_3 \\ x_2 \cdot a_1 + y_2 \cdot a_2 + z_2 \cdot a_3 \\ x_3 \cdot a_1 + y_3 \cdot a_2 + z_3 \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot a_1 + y_1 \cdot a_2 + z_1 \cdot a_3 & x_1 \cdot b_1 + y_1 \cdot b_2 + z_1 \cdot b_3 & x_1 \cdot c_1 + y_1 \cdot c_2 + z_1 \cdot c_3 \\ x_2 \cdot a_1 + y_2 \cdot a_2 + z_2 \cdot a_3 & x_2 \cdot b_1 + y_2 \cdot b_2 + z_2 \cdot b_3 & x_2 \cdot c_1 + y_2 \cdot c_2 + z_2 \cdot c_3 \\ x_3 \cdot a_1 + y_3 \cdot a_2 + z_3 \cdot a_3 & x_3 \cdot b_1 + y_3 \cdot b_2 + z_3 \cdot b_3 & x_3 \cdot c_1 + y_3 \cdot c_2 + z_3 \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorrechnung:

Länge eines Vektors:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Vervielfachen eines Vektors /

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\boldsymbol{r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}}$$

$$\boldsymbol{r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}}$$

$$\boldsymbol{(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}}$$

Abstand zweier

Punkte:$|AB| = |\overrightarrow{AB}| =$

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{u} * \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Winkel zwischen zwei Vektoren:

$$\propto = cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Parameterdarstellung einer Geraden:

$$g\colon\ \overrightarrow{0X} = \overrightarrow{0A} + k \cdot \vec{v}$$

Parameterdarstellung einer Ebene:

$$E\colon\ \overrightarrow{0X} = \overrightarrow{0A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Linearkombination:

$r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + r_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ ist eine Linear-kombination der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{\ldots}, \overrightarrow{a_n}$.

Koordinatengleichung einer Ebene:

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

mit $d = \vec{n} * \overrightarrow{0A}$ und $\vec{n}$ =Normalenvektor

Umrechnung Parameterdarstellung in Koordinatengleichung:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\vec{n} * \vec{u} = 0 \ \wedge\ \vec{n} * \vec{v} = 0$ **oder** $\vec{n} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge\ \vec{n} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\left| \begin{matrix} n_1 \cdot u_1 + n_2 \cdot u_2 + n_3 \cdot u_3 = 0 \\ n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2 + n_3 \cdot v_3 = 0 \end{matrix} \right| \quad => \quad \begin{matrix} n_2 = \cdots \cdot n_1 \\ n_3 = \cdots \cdot n_1 \end{matrix} \quad mit\ z.B.\ \ n_1 = 1 \quad => \quad \begin{matrix} n_2 = \cdots \\ n_3 = \cdots \end{matrix}$$

$$d = \vec{n} * \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3$$

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d \quad <= Koordinatengleichung$$

Umrechnung Koordinatengleichung in die Parameterdarstellung:

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d \quad mit \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ **und z.B.** $n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 = d$

und z.B. $a_1 = 1\ und\ a_2 = 1 \quad => a_3 = \frac{d - n_1 \cdot a_1 - n_2 \cdot a_2}{n_3}$ **, sowie** $\vec{n} * \vec{u} = \vec{n} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge\ \vec{n} * \vec{v} = \vec{n} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\left| \begin{matrix} n_1 \cdot u_1 + n_2 \cdot u_2 + n_3 \cdot u_3 = 0 \\ n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2 + n_3 \cdot v_3 = 0 \end{matrix} \right| \quad => \quad \begin{matrix} u_2 = \cdots \cdot u_1 \\ u_3 = \cdots \cdot u_1 \end{matrix} \quad mit\ z.B.\ \ u_1 = 1 \quad => \quad \begin{matrix} u_2 = \cdots \\ u_3 = \cdots \end{matrix} \quad und\ \vec{v}\ ebenso$$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Stochastik:

Regressionsgerade:

$$\overline{x} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n}{n}$$

$$\overline{y} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n}{n}$$

$$m = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n - n\overline{x}\overline{y}}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - n\overline{x}^2}$$

$$b = \overline{y} - m\overline{x}$$

Korrelationskoeffizient:

$$m_x = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n - n\overline{x}\overline{y}}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - n\overline{x}^2}$$

$$m_y = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n - n\overline{x}\overline{y}}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - n\overline{y}^2}$$

$$|r| = \sqrt{m_x \cdot m_y}$$

$|r|=1$ volle Korrel.
$0{,}7 \leq |r| < 1$ starke Korr.
$0{,}3 \leq |r| < 0{,}7$ mittlere K.
$0 < |r| < 0{,}3$ schwache K.
$|r|=0$ keine Korrel.

Stochastikregeln:

Elementare Summenregel:

$$P(E) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n)$$

Laplace-Regel:

$$P(E) = \frac{Anzahl der zu E gehörenden Ereignisse}{Anzahl aller möglichen Ereignisse}$$

Komplementärregel: $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Satz von Bayes: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$

Erwartungswert einer Zufallsgröße:

$$E(X) = a_1 \cdot P(X = a_1) + a_2 \cdot P(X = a_2) + \ldots + a_n \cdot P(X = a_n)$$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bernoulli-Experiment: **q = 1 – p**

Fakultät: n!=n·(n–1) ·(n–2) ·…·3·2·1 1!=1 0!=1

Binomialverteilung:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit k=0; 1; … ; n

Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten:

$\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{n-1}$ für k=0; 1; … ; n

Rekursionsformel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Binomialverteilung:

$P(X = 0) = q^n$ und $P(X = k) = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(X = k-1)$ für q=1−p und k=0; 1; … ; n

Erwartungswert und Varianz:

$E(X) = \mu = n \cdot p$ $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Laplace-Bedingung: **σ > 3**

Varianz bei kleiner Stichprobe:

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} (\mu - a_x)$$

mit $\mu = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

Sigma-Regeln:

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$$

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$$

$$P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\%$$